

Egyszerűen ALM₁

**Az eszköz-forrás menedzsment nemzetközi modelljei
és gyakorlati alkalmazása**

Tanulmány és modell

Budapest, 2004. november

¹ A megvalósításhoz pénzügyi támogatást a Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete nyújtott, a hatályos jogszabályok szerint kiírt nyilvános pályázatra benyújtott pályamunka alapján. A pályázatot a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem Biztosítási Oktató és Kutató Csoportja nyújtotta be és nyerte el. Az egyetem hivatalos neve 2004. szeptember 1. óta Budapesti Corvinus Egyetem.

Bevezetés

Az ALM-ként elterjedt rövid angol elnevezés két fogalmat is takar:

- Asset-Liability Management (magyarul: eszköz-forrás menedzselés, és
- Asset-Liability Matching (magyarul: eszköz-forrás illesztés).

Az ALM² - mindkét értelmében - az aktuáriusok és a pénzügyi közgazdászok, valamint a számviteli szakemberek közötti együttműködést igényli. Ezt felismerve hoztunk létre egy olyan munkacsoportot, amelynek tagjai különböző szakterületeket képviselnek, és vázoltuk fel azt a probléma-mátrixot, amely meghatározza az ALM vizsgálati kereteit.

A tanulmány jelen formájában részbeszámoló, melyben áttekintő képet adunk az ALM kialakulásáról, a szakirodalomban és a gyakorlatban fellelhető modellekről, és egy mintapéldával illusztrálva ismertetjük az általunk választott eszköz-forrás illesztő modellt.

A végleges tanulmánynak része lesz a csoport által kialakított modellek egyikét megvalósító EXCEL alapú program, valamint a program segítségével készített futtatások és a kapott eredmények bemutatása. Kitérünk majd arra is, hogy milyen egyszerűsítéseket tartalmaz a modell, és miben látjuk a továbbfejlesztési lehetőségeket.

Mi szerepelt a pályázatban?

1. Az ALM kutatócsoport összetétele

A Budapesti Corvinus Egyetem négy oktatója, különböző szakterületek képviselői dolgoztak együtt, hogy az eszköz-forrás menedzsment minden részterületét lefedjék.

A csoport vezetője:

Dr. Kovács Erzsébet, kandidátus, a Biztosításkutató Csoport vezetője

A csoport tagjai:

Dr. Gyenge Magdolna, Ph.D (számvitel, eredményelemzés)

Dr. Komáromi Éva, kandidátus (matematikus, sztochasztikus programozás)

Szüle Borbála, tanársegéd (pénzügy, befektetések)

² Harmadik jelentése szerint az ALM az Association of Lloyd's Members rövidítése az Oxford Dictionary of Finance and Banking (1997) szerint.

2. A kutatási program célja, főbb témakörei, a feldolgozott források

a) Az eszköz-forrás menedzsment (ALM) elméletének feldolgozása

Kitérünk az életbiztosítási és nyugdíjpénztári eszközökkel és a forrásokkal kapcsolatos döntések számbavételére, az ALM lépéseire, az alkalmazható technikák felsorolására. Összefoglaljuk a téma tárgyalása szempontjából legfontosabb biztosítási, pénzügyi és számviteli fogalmakat, vázoljuk a kockázat mérésének módszertanát, és az alkalmazható sztochasztikus programozási modelleket.

Bemutatjuk azt, hogy az ALM hogyan alkalmazható az életbiztosításban, miközben a nem-életbiztosításban kifejlesztették a dinamikus pénzügyi elemzés (DFA) megközelítést, valamint azt is, hogy a koordináció hiánya milyen pénzügyi nehézségeket okozott az elmúlt években. A pénzáramlások illeszkedésének és az immunizáció pénzügyi alkalmazásának tapasztalatait a biztosítási és járadékszolgáltatási sajátosságok figyelembevételével tekintjük át.

Források:

Worldwide Asset-Liability Models című könyv, Cambridge University Press, 1998
Asset-liability management for insurers, Sigma, SwissRe, No.6/2000
Insurance Solvency Supervision, OECD Country Profile, OECD, 2002

b) ALM modellezés módszertana, a kockázati elemek mérése

- Cashflow teszt: a pénzáramlások mérése, átlagidő (duration) és konvexitás számítása
- Minimum teszt: a kötelezettségek várható értéke és a tőke megfelelés mérése
- Szolvencia teszt: a kamatkockázat, a hitel kockázat, az inflációs előrejelzésektől való eltérések kockázata, a befektetések és a kötelezettségek rossz illesztéséből adódó kockázat mérése
- Stressz teszt: a hirtelen bekövetkező változások hatása, az eredmények érzékenysége vizsgálat

Források:

Dardis, A. – Huynh, V.L. A New Asset-Liability Management Model, The Staple Inn Actuarial Society, London, 1995
White Paper on the Solvency Test, Financial Assessment Framework, Pension-Verzekeringkamer, The Netherland, 2003

c) ALM modellezés megvalósítása Excel-ben és gyakorlati alkalmazások

Az eszközök és források összehangolt értékelésére EXCEL programot készítünk, melyben – egyszerűsítő feltevések mellett – kiszámítható és felrajzolható a hatékony portfólió. A program keretében tesztelhető az eszközallokáció és az infláció változásának hatása. Az életbiztosítási és nyugdíjpénztári befektetésekre, a kötvény és részvényhozamok alakulásának követésére többperiódusos modellt dolgozunk ki. A pénzügyi tervezés eszköztárát és a lineáris programozás modelljeit felhasználva valósítjuk meg a hatásvizsgálatot lehetővé tevő modellt.

Források:

De Felice, M: Immunization Theory: An Actuarial Perspective on Asset-Liability Management, in: Financial Risk in Insurance, (ed: Ottaviani, G), Springer, 1995, pp 63-85

Worldwide Asset-Liability Models, Cambridge University Press, 1998. című könyv
24. fejezete: Total Integrative Risk Management Models

Az ALM témája roppant szerteágazó, interdiszciplináris terület, ezért több szálon indultunk el. Már ebben a szakaszban is világosan látható, hogy a téma további kutatása elengedhetetlen, a kidolgozott modell bővíthető és bővítendő.

- Az ALM témakörét érintő szakirodalom olyan mértékben bővül, hogy mindet feldolgozni a teljesítési határidő szabta korlát miatt nem lehetséges.
- A cikkekben, könyvekben ismertetett modellek matematikai háttére, feltételrendszere eltérő, egymással nem összehasonlíthatók, közülük a legjobb nem választható ki. A valóságban meglevő összefüggések leegyszerűsítése, egyes esetekben figyelmen kívül hagyása minden modellépítés során elengedhetetlen lépés.
- A kutatási szakaszban többször éreztük, hogy egy-egy probléma megoldását követően számos újabb kérdés vetődik fel. A kérdések zöme pedig olyan, hogy nincsen rájuk egyértelmű válasz, mert még a kapcsolódó szakterületeken belül is vita van a szakértők között.
- Az eszközoldal elemzésében általánosan alkalmazott kvantitatív pénzügyi módszerek, a hozam és a kockázatomérés technikái számos ponton bírálhatók, gyakorlati

relevanciájukat újabban több szerző megkérdőjelezi (pl. átlagidő, belső megtérülési ráta, kockáztatott érték). A helyettük újabban javasoltakat (pl. módosított átlagidő, konvexitás, koherens kockázati mértékek) is szerepeltetjük modellünkben, de várható, hogy a pénzügyi szakma fejlődése nyomán ezek megítélése is változni fog.

- Egy-egy biztosítótársaság vagy nyugdíjpénztár valós adatainak hiányában a kötelezettségek tagolására, az adatállomány szerkezetére is csak egyszerűsítő feltevessel élhettünk.
- A szakirodalomból megállapítható, hogy egy-egy valós méretű eszköz-forrás modell futtatása roppant hosszú időt igényel. Jónak értékelhető az a program, amely 3 órán belül eredményt ad. További problémaként említhető az, hogy az ALM futtatására, gyakorlati megvalósítására alkalmas nemzetközi szoftverek ára nagyon magas, egyetemi forrásból nem finanszírozható. (Az elnyert kutatási támogatás meg sem közelíti a beszerzési árat.) Ezért fel sem merülhetett az az igény, hogy ezeket egymással vagy az általunk kialakított modellel összehasonlítsuk. Ilyen részletezettségű program kidolgozását nem is tartottuk feladatunknak.

A fentieket előrebozátva a kutatás eredményeiről a következőkben adunk számot.

1. Mire terjed ki az eszköz-forrás menedzselés?

1.1 Az ALM története, kialakulása

Az eszközök és kötelezettségek külön-külön történő tervezése után a XX. század közepén vetődött fel annak az igénye, hogy a két oldalt összefüggéseiben vizsgálják. Elsődlegesen tehát az eszközök és források illesztése valósult meg, de mára az angol rövidítés két fogalmat is takar.

Asset-Liability Matching (magyarul: eszköz-forrás illesztés)

Asset-Liability Management (magyarul: eszköz-forrás menedzselés)

Az ALM³ - mindkét értelmében - az aktuáriusok és a pénzügyi közgazdászok közötti együttműködést igényli. Ez jelentős szemléletváltozást követel ahhoz képest, hogy az előző mintegy 50 évben a két szakma képviselői külön-külön foglalkoztak hasonló kérdésekkel.

A pénzügyi szakemberek az eszközoldalt, az aktuáriusok a forrásoldalt tartották elsősorban szem előtt. A biztosítók számára a kötelezettségek kielégítése volt az elsődleges cél, amelyet szolvencia alapon vizsgáltak, az eszközök bizonyos kombinációja mellett. A kockázatok elemzését több lehetséges eszköz-keverék mellett elvégezték, és így alakították ki a befektetési politikát.

A két szakterületen a kutatások párhuzamosan haladtak, a legfontosabb eredmények szinte egy időben születtek meg. Ezt a folyamatot nyomon követve egészen 1952-ig mehetünk vissza, amikor Redington az immunizáció elméletet, Markowitz pedig a hatékony portfóliókról szóló elgondolását publikálta.

Pénzügyi-közgazdasági gyökerek

A modern pénzügyek atyjának tekintett **Markovitz** 1952-ben jelentette meg cikkét az eszköz- allokációról, amelyben bemutatja, hogy a szórással mért befektetési kockázat diverzifikáció révén csökkenthető a hozam csökkenése nélkül akkor, ha az eszközök hozamai korrelálnak egymással. Ebben a cikkben vezette be Markovitz a hatékony portfólió fogalmát, és itt szerepel először az az ábra, amely egy görbe mentén mutatja az adott kockázat mellett

³ Harmadik jelentése szerint az ALM az Association of Lloyd's Members rövidítése az Oxford Dictionary of Finance and Banking (1997) szerint.

elérhető maximális hozamot. Markovitz az eredeti ötletét 1987-ben fejlesztette tovább. Közben 1963-ban **Sharpe** a Markovitz-modell gyakorlati adaptációjaként egyszerű lineáris regressziós modellt javasolt, amely CAPM (Capital Asset Pricing Model) néven vált ismertté.

Számos pénzügyi szakember jelentős eredményei nem jelennek meg ebben az összefoglalóban, mert csak áttételes hatásuk van az ALM kialakulására. Témánk szempontjából említést érdemel azonban **Leibowitz, Kogelman, Bader és Dravid** 1994-es cikke, amelyben dinamizálják a korábban egy éves időhorizonton vizsgált eszközallokációs stratégiákat. Modelljük nem csak a hatékony portfólió mentén való elmozdulást vizsgálja, hanem azt is, hogy mi történik, ha az éves hozam egy adott valószínűség mellett egy bizonyos szint (shortfall line) alá esik.

E fontos kiegészítés kiemelése mellett hangsúlyozni kell azt is, hogy ez a modell valójában nem ALM modell, hiszen a kötelezettségekről nem is tesz említést. Ez abból fakad, hogy a 80-as és a 90-es évek neves pénzügyi szerzői általában feltételezték, hogy minden befektető számára azonos az időtáv (**Harrington, 1987**), továbbá a befektetők számára azonos a kockázat (**Brealey és Myers, 1991**).

Az eszközallokációs modellek fejlődésének első negyven éve módszertani alapot teremtett az ALM számára. A különbség köztük abban áll, hogy a biztosítóknak hozott eszközallokációs döntések során a kötelezettségek kielégítése épp olyan fontos, mint maguknak az eszközöknek a kiválasztása.

Aktuáriusi gyökerek

Az aktuáriusi szemléletben döntő változás következett be 1952-ben, amikor **Redington** publikálta „Review of the Principles of Life Office Valuations” című cikkét⁴ a Journal of the Institute of Actuaries folyóiratban.

Már a cikk megjelenése előtt világszerte jellemző volt az, hogy a biztosító társaságok az eszközök átlagidejét (duration) és a kötelezettségek átlagidejét egyenlővé tették, de az immunizáció jelentőségét nem ismerték fel. Ezért nem alkottak stratégiát arra, hogyan lehet függetleníteni a hozamot a kamatlábak változásától.

⁴ Redingtonnak erre a cikkére hivatkozik az immunizáció tárgyalásánál Bodie-Kane-Marcus: Investments c. könyve is. IRWIN, Second Edition, 1993. (484. oldal)

A konvexitás fogalmát sem használták, amíg **Tilley** 1988-ban a 23. Nemzetközi Aktuárius Kongresszuson (International Congress of Actuaries) Helsinkiben fel nem hívta a figyelmet arra, hogy a második deriváltból számolható konvexitás hogyan segíti az immunizációt.

Mára már Redington alapötlete – részben modelljének egyszerűsége miatt – a klasszikus aktuáriusi ALM részévé vált. A továbblépést **Wilkie** (1986) és **Hardy** (1993) sztochasztikus modelljei, valamint a számítógépek kapacitásának rohamos növekedése tették lehetővé.

1.2 Az eszköz-forrás menedzselés és a számvitel

"A biztosítók abban különböznek más vállalkozásoktól, hogy a biztonság kérdése a biztosítóintézeteknél nem csupán a (részvény)tulajdonosoknak fontos kérdés, hanem a kötvénytulajdonosoknak⁵ is."⁶

Általánosságban azt mondhatjuk, hogy a biztosítási szerződés két fél között jön létre, az egyik a biztosított egyén (kötvénytulajdonos), aki egy viszonylag alacsony, ugyanakkor biztos ráfordítást⁷ vállal (biztosítási díj) egy ugyan bizonytalan, de annál nagyobb ráfordítással szemben, a másik fél pedig maga a biztosító, aki ezt a nagy kockázatot vállalja egy alacsonyabb, de biztos eredmény fejében.

A legfontosabb feltétel a biztosító társaságokkal kapcsolatban az, hogy a szerződésben vállalt kötelezettségeit bármely pillanatban tudja teljesíteni. Ennek megfelelően a működésük legfontosabb fogalmai a biztonságra törekvés és a fizetőképesség megőrzése, amely az eszköz-forrás menedzselés, mint tevékenység alapját jelenti.

⁵ Kötvénytulajdonos fogalmán a biztosítási kötvény tulajdonosát értem.

⁶ Allen. E. Mayerson, "Ensuring the Solvency of Property and Liability Insurance Companies" Insurance, Government, and Social Policy (Homewood, Illinois: Richard D., 1969, pl. 149.)

⁷ Ráfordítás, mert bár a biztosítást igénybe vevő részéről ez nem más, mint a tevékenysége során felhasznált erőforrás, így többnyire az önköltség része lehet, tehát költségként számolandó el, onnan továbbgöngyölítve többnyire a vállalkozás eredményére fejt ki csökkentő hatást. (Mind a nemzetközi, mind a magyar gyakorlatban bizonyos helyzetekben ez a biztosítási díj a vele kapcsolatos vagyontárgy bekerülési értékét, így a vagyont növeli, azonban többnyire nem ez a jellemző.)

Milyen forrásokkal rendelkeznek a biztosítók?

Az általános vállalkozások vagyont értve eredet szerint vizsgálva azt alapvetően két nagy csoportra bonthatjuk, saját tőkére és idegen tőkére.

A vállalkozás **vagyommérlege** tehát az alábbiak szerint alakul:

1. számú ábra

Vagyommérleg,			
Eszközök		Saját tőke	
		Idegen tőke	

A biztosítóintézetek alapításuk pillanatától szintén rendelkeznek a tulajdonosok által véglegesen átadott tőkével, illetve működésük során bizonyos tranzakciókból keletkeznek kötelezettségeik a többi vállalkozáshoz hasonlóan. Alaptevékenységük során azonban az ügyféltől elfogadott díj ellenében kötelezettséget vállalnak. Ez a díj tehát – azon felül, hogy természetesen a működési költségeket illetve a biztosító nyereségét hivatott fedezni – kell, hogy fedezze a kár bekövetkeztekor a szerződés alapján a szerződőnek/biztosítottnak járó térítést. Amennyiben elfogadjuk, hogy ezek a vagyoni elemek passzíválhatók, akkor a biztosítók mérlegképe a következőképpen alakul:

2. számú ábra

Vagyommérleg,			
Eszközök		Saját tőke	
		Idegen tőke (kötelezettségek)	
		Idegen tőke – Potenciális kötelezettség – tartalékok ⁸ – kockázat-, vagy kárvétények	

⁸ Ezt a tartalékot a US GAAP a kőtvénytulajdonosok tartalékának nevezi, utalva arra, hogy ez tulajdonképpen az általuk befizetett pénznek a forrása, amely a kár bekövetkeztekor nekik jár.

Milyen lehet a biztosítók potenciális mérlegképe?

Az általános vállalkozások tulajdonosai a saját pénzük befektetésével indítják el, majd – a pótlólagos tőkebevonástól eltekintve – hosszú és rövid lejáratú idegen tőkével történő finanszírozással növelik vagyonukat, így számukra fontos lehet az a szempont, hogy az a bizonyos vagyónrész mennyi ideig van a vállalkozásukban, mennyi ideig várnak működési eredményt, vagyongyarapodást tőle, illetve mikor aktuális az azt keletkeztető kötelezettség visszafizetése. A biztosítóintézeteknél ugyanakkor a biztonságra törekvés a lényeg, tehát az, hogy a már vázolt kötvénytulajdonosi tartalék minden esetben rendelkezésre álljon, hogy a bekövetkező kár abból fedezhető legyen. Így fontos szempont az, hogy a tartalékok megfeleltetése a befektetésekkel minden időpillanatban igazolható legyen.

Ha mindezeket mérlegszinten szeretnénk vizsgálni, akkor ennek megfelelően egy sematikus mérlegkép a következőképpen alakulna:

3. számú ábra

Vagyonsmérleg,			
Tartalékok fedezetül szolgáló eszközök	↔	Biztosítási eseményekből adódó potenciális fizetési kötelezettség	
Egyéb eszközök	↔	Saját tőke Egyéb kötelezettségek	

A tartalékoknak megfelelő vagyont a 192/2000. Kormányrendeletben⁹ definiált „**Befektetések**”, illetve „**Követelések**” és „**Egyéb eszközök**” főcsoportokba sorolt eszközökben lehet tartani

A befektetések formáját *A biztosítókról és biztosítási tevékenységről szóló törvény* (2000. évi LX. Törvény, Bit) III. fejezete az alábbiakban szabályozza :

„**134. §** A biztosító biztosítástechnikai tartalékai a következő eszközökben tarthatók:

A) befektetések

⁹ A biztosítók éves beszámoló készítési és könyvvizelési kötelezettségének sajátosságairól

- a) *hitelviszonyt megtestesítő értékpapírok, kötvények, és más hitelviszonyt megtestesítő pénzügyi és befektetési eszközök,*
- b) *kölcsönök,*
- c) *részvények, részesedési viszonyt megtestesítő változó hozamú egyéb értékpapírok, illetve egyéb részesedések,*
- d) *befektetési jegyek és egyéb kollektív befektetési értékpapírok,*
- e) *ingatlanok, ingatlanokhoz kapcsolódó vagyoni értékű jogok;*
- B) *követelések*
 - f) *követelések a viszontbiztosítótól, ideértve a viszontbiztosításba adott kockázatokra a viszontbiztosító által megképzett biztosítástechnikai tartalékokat is,*
 - g) *letéti követelések és más, a viszontbiztosításba átvett biztosítási ügyletekből származó követelések,*
 - h) *a biztosítási és a viszontbiztosítási ügyletekből származó, a biztosítottakkal és a biztosításközvetítőkkel szembeni 3 hónapnál nem régebbi követelések,*
 - i) *biztosítási kötvénykölcsön,*
 - j) *adó-visszatérítések,*
 - k) *visszkereseti követelés;*
- C) *egyéb eszközök*
 - l) *ingatlanokon kívüli tárgyi eszközök, az óvatosság elve alapján számított értékcsökkenéssel csökkentett értékben,*
 - m) *hitelintézeti folyószámlán és a pénztárban lévő pénzkészlet, valamint a hitelintézeti betétek, vagy betételfogadásra jogosult intézménynél lévő betét (követelés),*
 - n) *elhatárolt kamatok, bérleti díjak,*
 - o) *elhatárolt szerzési költségek.*

(A biztosító egyébként köteles ezen csoportosítás szerint külön eszköznyilvántartásba helyezni a matematikai tartalékok, valamint a befektetési egységhez kötött tartalékok fedezetéül szolgáló eszközöket. Bit 143. §)

A törvény azonban nem csupán a befektetési formát, hanem az egyes befektetési formák nagyságát is meghatározza a biztosítástechnikai tartalékok vonatkozásában (Bit 135-142.§).

Ha a vállalkozás vagyonát olyan sorrendben helyezzük el a mérlegben, hogy – az eszközök esetében – azok mikor válnak (kész)pénzzé, illetve – források esetében – azokat milyen időszakon belül kell pénzügyileg rendezni, a pénzügyi helyzet vizsgálatának egyik gyakorta összeállított dokumentumát, a likviditási mérleget kapjuk.

A számviteli szakirodalom a likviditási mérlegeket két fő csoportba sorolja: *statikus és dinamikus likviditási mérlegek.*

E két csoporton belül attól függően, hogy a vállalkozás érdekhordozói számára mi értékelhető releváns időbeosztásként, beszélhetünk 4 fokozatról (4. sz. ábra), vagy több fokozatú likviditási mérlegről, melynek a fokozatai – az első és utolsó kivételével –

tetszőleges időtartamot foghatnak át. (Az első és az utolsó – azok tartalma miatt – általában megegyezik a 4 fokozatú likviditási mérleg első és negyedik fokozatával.)

4. számú ábra

Likviditási mérleg,	
I. Likvid eszközök	I. Azonnal esedékes kötelezettségek
II. Mobil eszközök	II. Rövid határidőn belül esedékes kötelezettségek
III. Mobilizálható eszközök	III. Hosszabb határidőn belül esedékes kötelezettségek
IV. Immobil eszközök	IV. Vissza nem fizetendő kötelezettségek

A statikus likviditási mérleg jellemzője, hogy – bár egy dinamikus vagyommérleg¹⁰ alapján is készülhet – a likviditást, illetve esedékességet egy adott időpontra vonatkoztatva vizsgálja.

A dinamikus likviditási mérleg összeállításakor ugyanakkor az eszközök és források besorolásánál a jövőbeni (várható) eseményeket is figyelembe kell venni.

Ha ötvözzük a biztosítóintézetek korábban vázolt sematikus mérlegképét, melynél az eszközök és források csoportosításának alapja a solvabilitás tükrözése (3. sz. ábra) és a likviditási mérleg likviditás/esedékesség alapján történő eszköz-forrás besorolását, akkor tulajdonképpen az eszköz-forrás menedzsment – *mérlegsztű* – probléma megközelítését láthatjuk.

5. számú ábra

...mérleg,		
Tartalékok eszközök	fedezetéül	szolgáló
I. Likvid eszközök		Biztosítási eseményekből adódó potenciális fizetési kötelezettség
II. ...		I. Azonnal esedékes kötelezettségek
...		II. ...
Egyéb eszközök		...
		Saját tőke Egyéb kötelezettségek

¹⁰ A dinamikus vagyommérleg összeállításának célja a *realizált eredmény* meghatározása, mely során az eszközökre és a forrásokra vonatkozóan is múltbeli bekerülési értéken történő értékelést preferálja. A dinamikus vagyommérlegek a dinamikus (és az organikus) mérlegelmélet alapján állíthatók össze.

Ha mindezeket elfogadva ebből a mérlegképből indulunk ki, akkor az eszköz-forrás menedzsment feladata nem más, mint a biztosítók biztosítástechnikai tartalékainak és befektetéseinek illesztése, melyhez – statikus – információt az analitikus nyilvántartásból nyerhetünk. Ha azonban ennek dinamikus változatát szeretnénk összeállítani, akkor ahhoz olyan információkra van szükség, melyek a számviteli rendszerből már nem állíthatók elő, azokhoz további pénzügyi és matematikai számításokra van szükség, melyek alapját természetesen az analitikus nyilvántartások, valamint a jövőre vonatkozó előrejelzések és feltevések képezhetik.

1.3 A hozam értékelése

Ha egy pénzügyi modellben az eszközök hozamáról beszélünk, akkor ott általában olyan hozamról van szó, amely a piaci érték változása alapján határozható meg.

A biztosító számára a hozam és a kockázat együtt értelmezendő. A biztosító időről-időre szolvens kell, hogy legyen, azaz azon jelenlegi eszközök jövőbeli értékét kell viszonyítani a kötelezettségekhez, amelyekkel azt a kötelezettséget kielégítik. Ezek a jövőben elvárt eszközértékek azokhoz a feltevésekhez kapcsolódnak, amelyeket a díjkalkuláció során felhasznál az aktuárius.

A jövőbeni hozamok jelentősen ingadozhatnak, miközben az aktuárius a díjkalkulációban hosszú távra feltételezett – rögzített – befektetési hozammal (technikai kamattal) számol. **Ha a feltevése alulteljesül, akkor a biztosító inszolvens lesz az időszak végére, akkor is, ha a befektetési döntéseket mindig pénzügyileg helyesen, a magasabb hozam - alacsonyabb kockázat kombinációt választva hozza meg.**

Ezt a problémát egy kis számpéldán¹¹ keresztül vázoljuk:

1 millió Ft-os biztosítási összeg két éves tartamra 7% technikai kamat mellett 873.439 Ft egyszeri nettó díj ellenében vállalható, mert $1/(1,07)^2 = 0,8734387$.

A piacon elérhető A és B befektetési alternatívák jellemzőit megvizsgálva a két évre vetített belső megtérülési rátákat (IRR) az alábbi feltételezések mellett számoljuk ki:

- a) az A befektetés éves hozama 6% vagy 8%, a B-é 2% vagy 12%,

¹¹ A lehető legegyszerűbb számolás érdekében itt a halálozási valószínűségtől is eltekintünk.

- b) az alacsonyabb és a magasabb hozamok $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következnek be,
c) befektetések hozamai egymástól függetlenül alakulnak.

Látható, hogy éves szinten mindkét befektetés átlagos hozama 7%. Az 1. és a 2. táblázatból kiolvasható, hogy mindkét esetben 25% esélye van a biztosítónak arra, hogy a 2. év végére szolvens lesz, de a B befektetés a kedvező kimenet esetében magasabb hozamot ígér.

Alacsonyabb technikai kamat, példánkban 6% mellett $1/(1,06)^2 = 0,8899964$ adódik, tehát 890 ezer Ft lenne a díj. Így konzervatív kamatláb feltevés mellett a B befektetés választásával csak a B1 kimenet bekövetkezésekor kell inszolvenciával számolni.

1. számú táblázat: Az A befektetés hozamai

A Kimenet	Vsz.	első év hozama	második év hozama	effektív hozam	1000 Ft befektetés értéke a 2. év végén	
					7% mellett	6% mellett
1	0,25	6%	6%	6,0000%	981,396	1000,000
2	0,25	6%	8%	6,9953%	999,913	1018,868
3	0,25	8%	6%	6,9953%	999,913	1018,868
4	0,25	8%	8%	8,0000%	1018,779	1038,092

2. számú táblázat: A B befektetés hozamai

B Kimenet	Vsz.	első év hozama	második év hozama	effektív hozam	1000 Ft befektetés értéke a 2. év végén	
					7% mellett	6% mellett
1	0,25	2%	2%	2,0000%	908,726	925,952
2	0,25	2%	12%	6,8831%	997,816	1016,732
3	0,25	12%	2%	6,8831%	997,816	1016,732
4	0,25	12%	12%	12,0000%	1095,642	1116,412

Az a)-c) feltevések mellett az A befektetés várható hozama magasabb, és kevésbé kockázatos, mert a hozamok szórása kisebb, tehát a hagyományos pénzügyi szemlélet alapján egyértelműen az A befektetés választása indokolt. A részeredményeket a 3. táblázat mutatja.

3. számú táblázat: 2 évre vetített effektív hozamok¹² átlaga és szórása

A átlag	6,9977%	B átlag	6,9416%
A szórás	0,7071%	B szórás	3,536%

Ha az aktuárius kezdetben magasabb, például 9% technikai kamattal számol, akkor 841.679 Ft egyszeri díjat kell beszedni. Ezen összeg fenti feltételek melletti befektetése csak a B4 kimenet mellett eredményez szolvens pozíciót (1055800Ft lenne az értéke). Tehát magasabb technikai kamat mellett a biztosító számára a B befektetés kedvezőbb, mint az A.

Az eredmények összefoglalásaként megállapíthatjuk, hogy alacsony technikai kamatláb feltételezése mellett a biztosító döntése egybeesik a hagyományos hozam-kockázat alapú pénzügyi döntéssel. Ezért az eszközallokációs modellek ALM modellként alkalmazhatók, ha e speciális feltételek fennállnak.

Átlagos hozam feletti technikai kamatláb mellett a magasabb hozamú – ezért kockázatosabb – befektetések választása következhet be. Ekkor a szolvencia biztosítása nagyobb körütekintést és összetettebb modell alkalmazását igényli.

1.4 Kockázatkezelés és ALM

Az eszköz-forrás menedzselés (ALM) egyik fő alkalmazási területe a biztosítók gyakorlatában felmerülő kockázatok integrált kezelése. A biztosítók tevékenységében számos kockázat fordul elő, amelyek az életbiztosítással, illetve a nem-életbiztosítással foglalkozó cégek esetében jelentősen különbözhetnek. Az életbiztosító társaságok esetében a fő kockázati forrásokat és azok hozzájárulását a teljes kockázatot tükröző tőkeszükséglethez (*economic capital*) egy külföldi adatokat vizsgáló tanulmány¹³ a következőképpen mutatta be:

¹² Az effektív hozam számítása 2 éves tartamon: $((1+i_1)(1+i_2))^{1/2}-1$

¹³ OWC[2001]

- életbiztosítási kockázat: 5 %
- hitelkockázat: 10 %
- működési kockázat: 30 %
- piaci/ALM kockázat: 55%.

Ezek az adatok az életbiztosítók esetében felhívják a figyelmet a kockázatkezelésben az „ALM-kockázat” fontosságára. Az ALM az eszközök és kötelezettségek eltérő értékalakulásából adódó kockázatok kezelésével is foglalkozik; az életbiztosítók esetében ennek azért is van jelentősége, mivel az eszközök és a források között számottevő különbségek vannak.¹⁴ Az életbiztosítók esetében az eszközök között elsősorban a befektetések, a források között pedig a biztosítási szerződésekkel összefüggő kötelezettségek¹⁵ aránya jelentős. Az életbiztosítókat általában jellemző mérlegszerkezet alapján az eszköz-forrás menedzselési folyamatban a következő kockázatokkal mindenképpen érdemes foglalkozni:

- a források összetételéből adódóan az életbiztosítási kockázattal
- az eszközök összetétele következtében a befektetések kockázatával
- az eszközök és a források összehangolásával kapcsolatos kockázatokkal.

Az életbiztosítási kockázat kezelésével a biztosítóknál elsősorban az aktuáriusok, a befektetési kockázatokkal pedig főként a befektetési szakemberek foglalkoznak. Amennyiben valamely életbiztosító esetében adotttnak feltételezzük a vállalt életbiztosítási kockázat mértékét (tehát például azt, hogy a biztosító milyen feltételek mellett köt életbiztosítási szerződéseket), akkor az ALM egyik célja lehet (a befektetési kockázat figyelembe vételével) az eszközök és források összehangolása során valamely **„optimális” befektetési stratégia** kereteinek felvázolása. Ennek során felmerül a kérdés, hogy milyen befektetési stratégiát tekinthetünk

¹⁴ Ezeket részletesebben például Szüle[2004] foglalja össze.

¹⁵ A „kötelezettség” fogalom jelen esetben az adott tételek tartalmára vonatkozik, amelyek – technikailag – a biztosító társaságok mérlegében nem a „G.Kötelezettségek”, hanem – a unit-linked életbiztosítások tartaléka kivételével – a „C.Biztosítástechnikai tartalékok” főcsoportban találhatók. Ettől természetesen azok tartalmilag legtöbb esetben kötelezettségnek, vagy legalább potenciális kötelezettségnek tekinthetők.

„optimálisnak”. A biztosító számára nyilvánvaló kockázatot jelent, ha a kötelezettségek kiegyenlítése érdekében tartott befektetések értéke a kiegyenlítendő kötelezettségek értéke alá csökken, így „optimálisnak” tekinthetjük azokat a befektetési stratégiákat, amelyek valamilyen szempontból e kockázat minimalizálását jelenthetik. Az optimális befektetési stratégia fogalmát a továbbiakban a biztosítók kockázatának jellemzői alapján pontosítjuk.

A jelenleg Magyarországon érvényesülő szabályozás szerint a biztosítók befektetéseinek számottevő részét az állampapírokba való befektetések teszik ki. Magyarországon ennek megfelelően az életbiztosítás ági biztosítástechnikai tartalékok (a befektetési egységekhez kötött életbiztosítás tartalékának kivételével) befektetés-állományának meghatározó részét az elmúlt időszakban állampapírok alkották:

4. számú táblázat: Néhány befektetési forma részesedése a befektetés-állományból I.

	2003. II. negyedév	2003. IV. negyedév	2004. II. negyedév
Magyar állampapírok	87,9%	90,3%	88,5%
Jelzáloglevél	4,5%	5,0%	5,5%
Részvény	0,6%	0,6%	0,3%
Befektetési jegyek	0,6%	0,7%	0,7%
Betétek, pénzkészletek	3,4%	0,9%	1,1%

Forrás: PSZÁF[2004]

A befektetési egységekhez kötött életbiztosítási tartalékok befektetés-állományának megoszlása ettől az elmúlt időszakban jól megfigyelhetően eltért, azonban még ebben az esetben is jellemző volt a befektetés-állományon belül a magyar állampapírok meghatározó aránya:

5. számú táblázat: Néhány befektetési forma részesedése a befektetés-állományból II.

	2003. II. negyedév	2003. IV. negyedév	2004. II. negyedév
Magyar állampapírok	72,7%	70,1%	66,4%
Jelzáloglevél	0,5%	0,6%	3,2%
BÉT-en jegyzett részvény	14,7%	15,5%	17,1%
Befektetési jegyek	9,8%	10,6%	11,9%
Betétek, pénzkészletek	0,6%	1,4%	0,4%

Forrás: PSZÁF[2004]

Az állampapírba történő befektetések egyik fontos jellemzője, hogy az értékpapírok tartásából származó pénzáramlások értéke többnyire előre ismert. Ebben az esetben a biztosító valamely állampapírba történő befektetésének értéke¹⁶ ($P_{eszköz}$) a következőképpen írható fel:

$$P_{eszköz} = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

ahol:

r : lejáratig számított hozam

$C_1, C_2, \dots, C_n$: a befektetésből származó pénzáramlások

valamint feltételezzük, hogy az állampapír évente egyszer fizet kamatot és n éves lejáratú.

Az adott eszköz (piaci) értéke tehát összefügg a fix kamatozású értékpapír lejáratig számított hozamával¹⁷. Tulajdonképpen az értékpapír-piacokon az értékpapír árát lehet megfigyelni, amelyből a fix pénzáramlások ismeretével kiszámítható a lejáratig számított hozam értéke. A piacon kereskedett értékpapírok árának megfigyelésével a (zérókupon) hozamgörbe is becsülhető, amely az adott piacon meghatározott lejáratú időpontokig elvárt hozamot mutatja. Valamely fix kamatozású értékpapír piaci értéke utal arra is, hogy mennyiért lehetne egy adott

¹⁶ A képletben tulajdonképpen a jelenértékszámítás módszerét alkalmazzuk.

¹⁷ „A lejáratig számított hozam (yield to maturity, YTM) az az átlagos hozam, amelyet a kötvény akkor biztosít, ha most megvásároljuk és lejáratig megtartjuk.” (Bodie et al.[1996] 1. kötet, 387. oldal)

napon eladni az értékpapírt; ezt a piaci értéket a piaci folyamatok (például a piaci kereslet és kínálat alakulása) befolyásolják. A piaci folyamatok hatása a lejáratig számított hozam esetleges változásán túl a hozamgörbe alakulásában is tükröződik. A fix kamatozású értékpapírokkal kapcsolatos kockázatkezelés során ezért gyakori a hozamgörbe bizonyos fajta változásai esetében optimálisnak tekinthető befektetési stratégiák említése.

Egy életbiztosító esetében nemcsak az eszközök, hanem többnyire a biztosítási szerződésekkel kapcsolatos fizetési kötelezettségek értékének előrejelzésére is találhatók módszerek. (Természetesen a biztosítási kockázatok miatt a későbbiekben esedékes fizetési kötelezettségek becslése nehezebb feladat, mint az államkötvényekből származó pénzáramlások meghatározása.) A kamatlábak lejárat szerkezetét érintő piaci folyamatok az életbiztosítók eszközeinek és a biztosítási szerződésekkel kapcsolatos kötelezettségeinek az értékére (jelenértékére) is kihatással lehetnek. Ebben az esetben az optimális befektetési stratégia célja lehet annak biztosítása, hogy a piaci folyamatok eredményeképpen a fizetési kötelezettségek kiegyenlítésére szolgáló eszközök értéke ne süllyedjen a kötelezettségek értéke alá, illetve hogy az eszközök későbbi értéke a lehető legjobban védett legyen a kamatlábak (illetve a hozamgörbe) változásaival szemben. E probléma egyik „klasszikus”, egyszerűsítő feltevések melletti megoldási javaslatát az 1950-es években *F.M.Redington*, egy életbiztosító társaság aktuáriusa vázolta fel. A következőkben az ezzel kapcsolatos fontosabb és a szakirodalomban gyakran említett megállapításokat tekintjük át.

Tételezzük fel, hogy a hozamgörbe vízszintes és egy évente egyszer kamatot fizető, n éves lejáratú, fix kamatozású államkötvény ára az értékpapír-piacon P , ahol:

$$P_{\text{eszköz}} = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

ahol:

r : a piaci hozamszint

$C_1, C_2, \dots, C_n$: az államkötvény pénzáramlásai.

Ezen kötvény értékének (árának) a piaci hozamszint változására való érzékenységet úgy is mérhetjük, hogy kiszámoljuk: az eredeti árához képest hány százalékkal változna a kötvény ára a hozamszint adott százalékpontos módosulása esetében:

$$\frac{\frac{\delta P}{\delta r}}{P} = \frac{-\frac{C_1}{(1+r)^1} - 2 \cdot \frac{C_2}{(1+r)^2} - \dots - n \cdot \frac{C_n}{(1+r)^n}}{\frac{C_1}{(1+r)^1} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^n}} = -\frac{1}{1+r} \cdot \left(\frac{C_1}{(1+r)^1} + 2 \cdot \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + n \cdot \frac{C_n}{(1+r)^n} \right)$$

A képletet – amely, mint ismeretes, a P függvény matematikai volatilitásának a negatívja – a következőképpen is felírhatjuk:

$$\frac{\frac{\delta P}{\delta r}}{P} = -\frac{1}{1+r} \cdot \left(1 \cdot \frac{\frac{C_1}{(1+r)^1}}{\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t}} + 2 \cdot \frac{\frac{C_2}{(1+r)^2}}{\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t}} + \dots + n \cdot \frac{\frac{C_n}{(1+r)^n}}{\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t}} \right) = -\frac{1}{1+r} \cdot \left(\sum_{t=1}^n t \cdot \frac{\frac{C_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t}} \right)$$

Bevezetjük a $w_t = \frac{\frac{C_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t}}$ jelölést, amelynek alkalmazásával a következő képlethez

jutunk:

$$\frac{\frac{\delta P}{\delta r}}{P} = -\frac{1}{1+r} \cdot \left(\sum_{t=1}^n t \cdot w_t \right)$$

A fenti képlet (-1)-szeresét a pénzügyi szakirodalom módosított hátralévő átlagos futamidőnek is nevezi, ami azzal függ össze, hogy a képlet egyik összetevője az ún. Macaulay-féle duration.¹⁸

$$\sum_{t=1}^n t \cdot w_t$$

¹⁸ Bodie et al.[1996] 1. kötet, 435-436. oldal.

$$\text{ahol } w_t = \frac{\frac{C_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t}}.$$

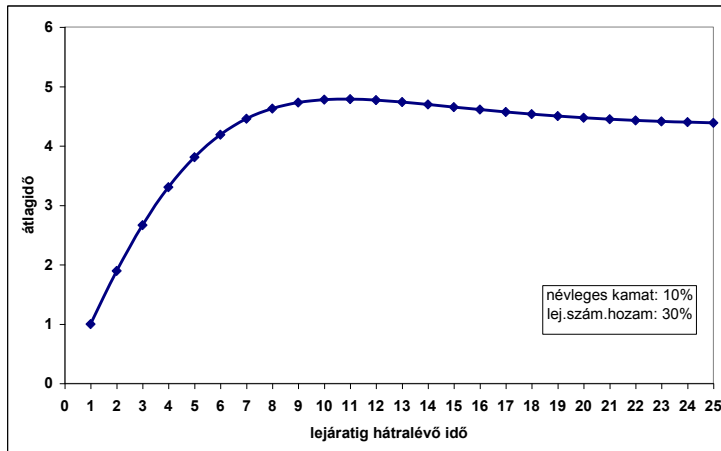
(Megjegyezzük, hogy folytonos kamatozással számolva a P függvény volatilitása éppen a hátralévő átlagos futamidőt adja.)

A fenti képletben vízszintes hozamgörbét feltételeztünk. A hátralévő átlagos futamidő koncepciója azonban kiterjeszthető a hozamgörbe párhuzamos eltolása esetére is oly módon, hogy ekkor a kötvény (portfólió) árának a meghatározásában a pénzáramlás egyes elemeinek a jelenértékét különböző azonnali (spot) kamatláb értékekkel számoljuk. Ez a Fischer-Weil formulához vezet folytonos kamatozás mellett, illetve az u.n. „kvázi” módosított hátralévő átlagos futamidőhöz diszkrét kamatozás mellett.

A kamatláb kockázat mérésére alkalmazható mutatószám képlete azt jelzi, hogy a kamatláb kockázatnak való kitettség és a „kamatlábérzékeny” befektetés hátralévő átlagos futamideje (átlagideje) között szoros összefüggés van: minél nagyobb az átlagidő, annál érzékenyebb a befektetés értéke a kamatláb megváltozására. Érdekes azonban felhívni a figyelmet arra, hogy a kamatláb kockázat és a lejáratig hátralévő futamidő között nem ilyen egyértelmű a kapcsolat: előfordulhat, hogy valamely befektetés lejáratig hátralévő futamideje nagyobb, a kamatláb megváltozására való érzékenysége mégis kisebb, mint egy másik befektetésé. Ez főként olyan befektetéseknél fordulhat elő, amelyek piaci ára jóval a névérték alatt van.

Példa:

Tegyük fel például, hogy adott egy kötvény, amely a lejáratáig évente egyszer a névérték 10 százalékát kitevő kamatot fizet, a lejáratig számított hozama pedig 30 százalék. Ebben az esetben attól függően, hogy milyen hosszú ezen kötvény lejáratig hátralévő futamideje, az átlagidő alakulását a következő ábra szemlélteti:



6. számú ábra: Átlagidő (duration) alakulása a lejáratig hátralévő futamidő függvényében

Ahogy az a kamatláb kockázatot is mérő átlagidő, illetve módosított átlagidő képlete is mutatja, a fix kamatozású portfóliók kezelésében az árfolyamok kamatláberzékenységét befolyásoló tényezők közül a következőknek jut fontos szerep:

- a lejáratig hátralévő időnek
- a fix kamatozású értékpapírok névleges kamatának
- a lejáratig számított hozamnak.

Az életbiztosító társaságok fő célja a fix kamatozású portfóliók kezelésénél a kamatláb kockázat minél teljesebb körű kiküszöbölése lehet. E cél megvalósítása érdekében az életbiztosító társaságok a befektetéseiknél ún. semlegesítő (immunizációs) módszereket alkalmazhatnak. Az immunizáció lényege, hogy a biztosító eszközeinek és kötelezettségeinek együttes kamatláb kockázatát igyekszik kiküszöbölni, amelynek során az egyik fontos eszköz a megfelelő befektetési stratégia megválasztása. A kamatláb kockázattal kapcsolatban két fontos kockázatot érdemes megemlíteni: az újrabefektetési kockázat arra utal, hogy a befektetési portfólióban tartott értékpapírok által fizetett pénzáramlásokat (például kamatokat) milyen aktuális kamat mellett lehet újra befektetni, míg az árfolyam kockázat azzal függ össze, hogy valamely értékpapírt egy adott időpontban mekkora összegért lehetne a piaci feltételek mellett értékesíteni. A fix kamatozású eszközök megválasztásakor a biztosítónak olyan

stratégiát érdemes választania, amely a kamatláb megváltozásából származó újrabefektetési kockázatot és árfolyamkockázatot egyaránt figyelembe veszi.

Példa:

Tegyük fel, hogy egy biztosítónak három év múlva 13.310.000 Ft-ot kell kifizetnie, miközben a piaci kamatszint évi 10 százalék. Tegyük fel továbbá, hogy a biztosító ezen kötelezettségének fedezésére jelenleg egy 10.000.000 Ft névértékű, évente egyszer a névérték 10 százalékát kitevő kamatot fizető kötvényt tart, amelynek lejáratig hátralévő ideje 4 év. Amennyiben a harmadik év végéig a piaci hozamszint nem változik meg (10 százalék marad), akkor a kötvény kamatfizetéseiből és a harmadik év végén a kötvény piaci áron történő értékesítéséből a biztosító a harmadik év végére pontosan akkora összeghez jut, amennyi a fizetési kötelezettségének kiegyenlítéséhez szükséges:

6. számú táblázat: *Kötvény pénzáramlásainak értéke 10 százalékos hozamszint mellett*

év	kötvény pénzáramlása (Ft)	3.év végi érték (Ft)	
1	1 000 000	1 210 000	(= 1.000.000*1,1 ²)
2	1 000 000	1 100 000	(= 1.000.000*1,1)
3	1 000 000	1 000 000	
4	11 000 000	10 000 000	(= 11.000.000/1,1)
összesen:		13 310 000	

Vizsgáljuk meg ezzel szemben azokat az eseteket, amikor (a kötvény megvásárlása után) a piaci hozamszint értéke 9 százalékra csökken, illetve 11 százalékra növekszik:

7. számú táblázat: *Kötvény pénzáramlásainak értéke 9 százalékos hozamszint mellett*

év	kötvény pénzáramlása (Ft)	3.év végi érték (Ft)	
1	1 000 000	1 188 100	(= 1.000.000*1,09 ²)
2	1 000 000	1 090 000	(= 1.000.000*1,09)
3	1 000 000	1 000 000	
4	11 000 000	10 091 743	(=11.000.000/1,09)
összesen:		13 369 843	

8. számú táblázat: Kötvény pénzáramlásainak értéke 11 százalékos hozamszint mellett

év	kötvény pénzáramlása (Ft)	3.év végi érték (Ft)	
1	1 000 000	1 232 100	(= 1.000.000*1,11 ²)
2	1 000 000	1 110 000	(= 1.000.000*1,11)
3	1 000 000	1 000 000	
4	11 000 000	9 909 910	(= 11.000.000/1,11)
összesen:		13 252 010	

Az adatok alapján látható, hogy amennyiben a piaci hozamszint az eredeti 10 százalékhöz képest csökken, akkor a harmadik év végén a kötelezettségek kiegyenlítésére rendelkezésre álló összeg magasabb, mint amennyire szükség van (a többlet értéke 13.369.843 Ft – 13.310.000 Ft = 59.843 Ft). Ezzel szemben viszont amikor a piaci hozamszint az eredeti 10 százalékhöz képest emelkedik, akkor a harmadik év végén a befektetés értéke alacsonyabb, mint amennyire a kötelezettségek maradéktalan kiegyenlítésére szükség volna (a hiányzó összeg értéke: 13.310.000 Ft – 13.252.010 Ft = 57.990 Ft). A példában szereplő adatok arra is rámutatnak, hogy a hozamszint megváltozása ellentétesen érintheti az újrabefektetési kockázatot és az árfolyamkockázatot. A hozamszint emelkedése az újrabefektetéseknél előnyösebb, azaz magasabb kamatot jelent, a harmadik év végi értékesítéskor azonban kedvezőtlenebb eredményre vezet, mint az eredeti 10 százalékos kamat. A hozamszint csökkenésének előnyös hatása ezzel szemben a harmadik év végén történő piaci árfolyamnál, az előnytelen hatások pedig az újrabefektetések során jelentkeznek. Összességében a kamatláb kockázat ebben a példában az újrabefektetési kockázat és az árfolyamkockázat eredőjeként határozható meg. A példa általános tanulsága, hogy a biztosítónak olyan befektetési stratégia kialakítására érdemes törekednie, amely az újrabefektetési kockázatot és az árfolyamkockázatot egyaránt figyelembe veszi.

A módosított átlagidő, illetve az átlagidő definíciójából megállapítható, hogy amennyiben két „kamatlábérzékeny” portfólió átlagideje és piaci értéke megegyezik, akkor a hozamszint (kis mértékű) megváltozása esetében a két portfólió értékében hasonló változások következnek be. Ennek következtében olyan helyzetekben, amikor a hozamszint megváltozására (tehát a hozamgörbe vízszintes elmozdulására) számíthatunk, akkor **a biztosító optimális befektetési stratégiáját** az immunizáció alapján is meghatározhatjuk: ebben az esetben az eszközök és a

kötelezettségek piaci értékét és átlagidejét azonos nagyságúra állítjuk be. Ennek a megközelítésnek azonban – az előbb vázolt előnyökön túl – hátrányai is vannak, amelyek közül a leginkább jelentősek a következők:

- A két portfólió megváltozásának mértéke csak a hozamszint kis mértékű módosulása esetében tekinthető egymáshoz hasonlóknak.¹⁹
- Az idő múlásával a hozamok esetleges változásán kívül az eszközök és a kötelezettségek lejáratig hátralévő ideje is módosul, ezért a befektetési portfólió folyamatos kiigazítására lehet szükség.

*Példa:*²⁰

A példában azt mutatjuk be, hogy a biztosító befektetéseinél az immunizáció alkalmazása esetében még a piaci hozamszint változatlansága esetén is rendszeresen szükség lehet a befektetési portfólió kiigazítására.

Tekintsünk egy biztosítót, amelynek három év múlva 13,676 millió forintot kell kifizetnie. Kötelezettségének semlegesítésére a biztosító ötéves lejáratú elemi kötvényt²¹ és három éves lejáratú, évente egyszer 12 százalékos kamatot fizető államkötvényt használ fel. Tételezzük fel, hogy a hozamgörbe vízszintes és a kamatláb jelenleg évi 11 százalék; a biztosító ilyen körülmények között évente igazítja ki a befektetési portfólióját az immunizáció (semlegesítés) során.

Az immunizált portfólió összetétele kezdetben:

A befektetési portfóliót úgy állítjuk össze, hogy az eszközök és a kötelezettségek jelenértéke és átlagideje megegyezzen. A kötelezettségek jelenértéke $\frac{13,676}{1,11^3} = 10$ millió forint, átlagideje

3 év. A befektetési portfólió összeállításánál arra törekszik a biztosító, hogy az átlagidő értéke szintén 3 év legyen. Ehhez figyelembe vesszük, hogy a három éves lejáratú kamatozó kötvény

¹⁹ Ez azzal függ össze, hogy a módosított átlagidő, illetve az átlagidő fogalma a piaci árfolyam hozamszint szerinti első deriváltjával van kapcsolatban.

²⁰ A példa bemutatásakor az eredmények közlésekor kerekített végeredményeket közlünk.

²¹ Az elemi kötvény a futamidő alatt nem fizet kamatot, a futamidő végén a névérték kifizetésére kerül sor.

átlagideje 2,69 év²², az öt éves elemi kötvény átlagideje pedig öt év. Az optimális befektetési portfólió meghatározásához a következő egyenletet kell megoldani (az egyenletben x jelöli azt az arányt, amelyet a befektetési portfólió értékéből kezdetben a kamatozó kötvénybe kell fektetni):

$$x \cdot 2,69 + (1-x) \cdot 5 = 3$$

Az egyenlet megoldása $x=0,8673$, vagyis a befektetési portfólió értékéből kezdetben 86,73 százalékot tesz ki a három éves kamatozó kötvénybe való befektetés. A befektetés-állomány kezdeti időpontra vonatkozó adatait a következő táblázat foglalja össze:

9. számú táblázat: *Befektetési portfólió összetétele kezdetben*

Eszközök:	Átlagidő	Befektetett összeg (mFt):
Kamatozó kötvény	2,69	8,672
Elemi kötvény	5,00	1,327
Összesen:		10,000

Tegyük fel, hogy a piacon a három éves kamatozó kötvényt 10 ezer forintos névértékű egységekben lehet megvásárolni. Ebben az esetben a példában feltételezhető, hogy a 10 ezer forintos névértékű kötvény piaci értéke az elemzés kiinduló időpontjában 10.244,37 forint, ugyanis:

$$10.244,37 = \frac{1.200}{1,11} + \frac{1.200}{1,11^2} + \frac{11.200}{1,11^3}$$

A 3 éves kamatozó kötvénybe fektetett 8,672 millió forint így (8,672 millió/10.244,37) darab 10 ezer forintos névértékű kötvény megvásárlását jelenti.

Az immunizált portfólió összetétele 1 év elteltével:

²² Ezt az előzőekben bemutatott képletek alapján számíthatjuk ki.

Egy év elteltével a kötelezettségek jelenértéke $\frac{13,676}{1,11^2} = 11,1$ millió Ft.

A befektetés-állomány értéke ekkor – figyelembe véve a kamatozó kötvényből vásárolt névérték nagyságát, valamint azt, hogy a hozamszint továbbra is évi 11 százalék – a következőképpen írható le:

10. számú táblázat: Befektetési portfólió értéke 1 év elteltével

Eszközök értéke (mFt):

3 éves kamatozó kötvény kamata	1,016
3 éves kamatozó kötvény értéke	8,610
5 éves elemi kötvény értéke	1,473
összesen:	11,100

A biztosító eszközeinek és kötelezettségeinek jelenértéke tehát megegyezik, viszont az átlagidejük eltér: a kötelezettségek átlagideje 1 év elteltével már csak 2 év, míg a kiinduló helyzetben érvényes befektetési arányok mellett az eszközök átlagideje 2,17 év (figyelembe véve, hogy az elemi kötvény átlagideje 1 év elteltével már csak 4 év, a kamatozó kötvény átlagideje pedig már csak 1,89 év). Megállapítható tehát, hogy még abban az esetben is, ha a piaci hozamszint nem változott, a példában az idő múlása miatt **szükségessé vált a befektetési portfólió kiigazítása**. Egy év elteltével az optimális befektetési portfólió meghatározásához a következő egyenletet kell megoldani (az egyenletben x jelöli azt az arányt, amelyet a befektetési portfólió értékéből egy év elteltével a kamatozó kötvénybe kell fektetni):

$$x \cdot 1,89 + (1-x) \cdot 4 = 2$$

Az egy év elteltével meghatározott optimális befektetési portfólió fő jellemzőit a következő táblázat foglalja össze:

11. számú táblázat: *Befektetési portfólió összetétele egy év elteltével*

Eszközök:	átlagidő	befektetett összeg (mFt):
Kamatozó kötvény	1,89	10,540
Elemi kötvény	4,00	0,560
Összesen:		11,100

A befektetési portfólió kiigazítása a példában szereplő adatok mellett a következőképpen történik:

Egy év elteltével az elemi kötvényből el kell adni 0,913 millió forint értékben ($0,913 = 1,473 - 0,56$).

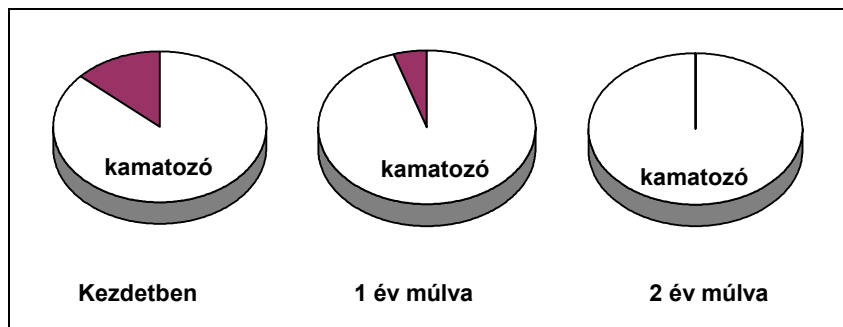
Az elemi kötvény értékesítéséből származó összeget a kamatozó kötvény kamatfizetésével együtt (összesen $0,913 + 1,016$ millió forint értékben) a kamatozó kötvény aktuális áron történő megvásárlására kell fordítani (egy év elteltével egy 10 ezer forintos névértékű kamatozó kötvény árfolyama 10.171 forint²³).

Az immunizált portfólió összetételének alakulása:

Az immunizáció során, amennyiben arra törekszünk, hogy az eszközök és a kötelezettségek átlagideje megegyezzen, a befektetési portfólió rendszeres kiigazítására van szükség. Ebben a példában a befektetési portfólióban két értékpapír szerepelhet. Feltéve hogy a befektetési portfóliót az immunizáció érdekében évente egyszer igazítják ki, a két értékpapír optimális aránya a befektetési portfólióban a példában a következőképpen alakul:

²³ Kiszámítása a következő képlet alapján történik: $\frac{1.200}{1,11} + \frac{11.200}{1,11^2}$.

7. számú ábra: Optimális befektetési portfólió összetételének változása



Látható, hogy a befektetési portfólión belül kezdetben a legmagasabb az elemi kötvény optimális aránya, később ez folyamatosan csökken.

Az előzőekben bemutatott immunizációs módszer tovább finomítható, ha a befektetési portfólió összeállításához további eszközök is felhasználhatók, illetve a kötelezettségek szélesebb körét vesszük figyelembe. Az eszközök és a kötelezettségek átlagidejének összehangolására törekvő immunizáció egyik legfontosabb jellemzője azonban, hogy rendszeresen portfólió-kiigazításra van szükség. Mivel a befektetési portfólió átrendezésének többnyire tranzakciós költségei is vannak, ezért az átlagidők összehangolására törekvő immunizációs stratégia költségekkel jár. A befektetési portfólió kiigazításakor felmerülő esetleges költségek miatt az átlagidők összehangolására épülő immunizáció során folyamatosan mérlegelni kell a portfólió-kiigazításból származó előnyöket (a kamatlábkockázat esetleges csökkentését), valamint a felmerülő költségek eredményt érintő hatását.

A portfólió rendszeres kiigazítását és az ezzel járó költségeket például a pénzáramlások illesztésének stratégiájával lehet kiküszöbölni. Ebben az esetben a biztosító **optimális befektetési stratégiájának** kialakításakor arra törekszik, hogy befektetésekből származó pénzáramlás minden időszakban feleljen meg a kötelezettségekből adódó pénzáramlásoknak. A többidőszakos pénzáramlás-sorozat illesztését dedikációs stratégiának szokás nevezni.²⁴ Amennyiben sikerül a befektetésekből olyan pénzáramlás-sorozatot összeállítani, amely

²⁴ Bodie et al.[1996] 1.kötet, 450.oldal

minden időszakban tökéletesen megfelel a kötelezettségekből adódó pénzáramlásoknak, akkor a portfólió folyamatos kiigazítására, valamint az ezzel járó költségek kifizetésére nincsen szükség. Ebben az esetben emellett az eszközök és a kötelezettségek átlagideje is megegyezik. A dedikációs stratégia ezen előnye mellett az egyik fontos hátránya azonban, hogy e stratégia alkalmazása erős feltételeket jelenthet a befektetési portfólió összeállításánál, és előfordulhat, hogy a gyakorlatban ezeket a feltételeket nem sikerül teljesíteni (például egy életbiztosítónál nehéz lehet egy 20 év múlva esedékes kifizetés megléte következtében a befektetési portfólióba egy 20 év múlva kifizetést teljesítő, egyéb szempontból²⁵ is megfelelő befektetést választani).

Az eszközök és a kötelezettségek átlagidejének összehangolására törekvő immunizációs stratégiákkal kapcsolatban érdemes felhívni a figyelmet arra is, hogy a kamatlábkockázat megfelelő semlegesítésének egyik követelménye, hogy a kötelezettségek értékével nominális értelemben előre számolni lehet, vagyis hogy a kötelezettségek értéke nem változik az infláció függvényében (az előzőekben bemutatott gondolatmenetben az inflációs hatások nem szerepeltek).

Az átlagidő (duration) mellett a fix kamatozású portfóliók kezelésében gyakran említik a konvexitás fogalmát (ez a pénzügyi szakirodalomban²⁶ használt definíció alapján a kötvényárfolyam hozam szerinti második deriváltjának és a kötvényárfolyamnak a hányadosa). Az eddig használt jelölésekkel a konvexitás definícióját a következőképpen adhatjuk meg:²⁷

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{P} \cdot \sum_{t=1}^n t \cdot (1+r)^{-t} \cdot w_t$$

²⁵ Például hogy az adott befektetésből várható pénzáramlások kifizetése alacsony kockázatú, vagyis a befektetés megfelelően „biztonságos”.

²⁶ Száz[2003] 245. oldal

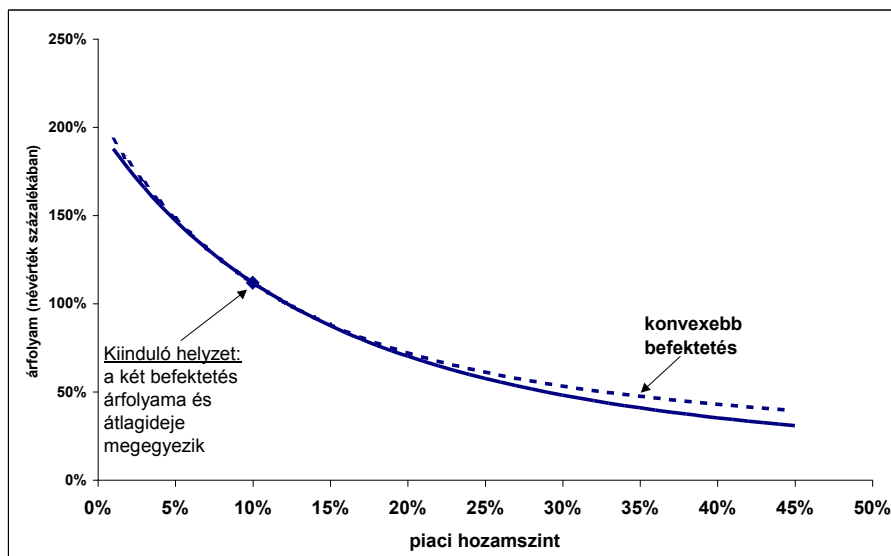
²⁷ Folytonos kamatszámítás esetében (amikor például valamely kötvény értékét a $\sum_{t=1}^n C_t \cdot e^{-r \cdot t}$ képlet alapján

határozhatjuk meg, a konvexitás felírható a következő képlettel: $\sum_{t=1}^n t^2 \cdot w_t$, ahol w_t értelmezése megfelel a folytonos kamatszámításnak.

$$\text{ahol } w_t = \frac{\frac{C_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t}}.$$

A konvexitás jelentőségét vízszintes hozamgörbe és a hozamszint megváltozásának feltevése mellett szemléltethetjük. Ebben az esetben ha valamely két fix kamatozású értékpapír piaci értéke és átlagideje megegyezne, miközben a konvexitásuk különbözne, akkor a nagyobb konvexitással rendelkező értékpapír árfolyama a hozamszint emelkedésekor kevésbé csökken, a hozamszint csökkenésekor viszont jobban emelkedik, mint a kisebb konvexitással rendelkező értékpapír árfolyama; ezt a jelenséget a következő ábra is mutatja:

8. számú ábra: Befektetések konvexitásának összehasonlítása



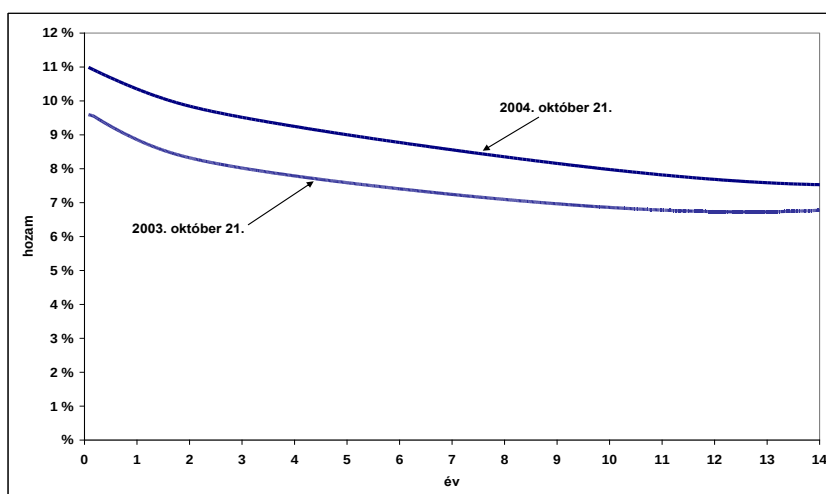
A megegyező átlagidők²⁸ esetében tehát a magasabb konvexitás vonzó lehet egy-egy befektetés esetében. Redington koncepciója szerint vízszintes hozamgörbét feltételezve a kötelezettségek portfólióját a befektetések portfóliójával immunizálhatjuk a kamatláb kis változásával szemben, ha a kötelezettségek és befektetések portfóliójának jelenértékei és

²⁸ Ez az ábrán is megfigyelhető: a kijelölt pontban nemcsak a két befektetés árfolyama, hanem a két függvényhez az adott pontban húzható érintő meredeksége is megegyezik.

átlagidője megegyeznek és a befektetési portfólió konvexitása legalább akkora, mint a kötelezettségek portfóliójának a konvexitása – ekkor a befektetésen haszon is elérhető.

Az eddig bemutatott összefüggések azonban – ahogyan az az előzőekben is szerepel – abban az esetben érvényesek, ha a hozamgörbe vízszintes, illetve a hozamgörbe párhuzamos eltolódásaival együttjáró kockázatok kezelésére törekszünk. A piaci folyamatok eredményeképpen azonban a hozamgörbe esetében nem feltételezhetjük automatikusan a párhuzamos eltolódásokat. (A hozamgörbe rövidebb és hosszabb lejáratra vonatkozó adatait részben eltérő tényezők, illetve például ugyanazon befolyásoló tényezők eltérően érinthetik, így a hozamgörbe gyakran nem párhuzamosan tolódik el.) Magyarországon például a zérókupon-hozamgörbe 2004. október 21. és 2003. október 21. között²⁹ a következőképpen mozdult el:

9. számú ábra: Zérókupon hozamgörbék alakulása Magyarországon

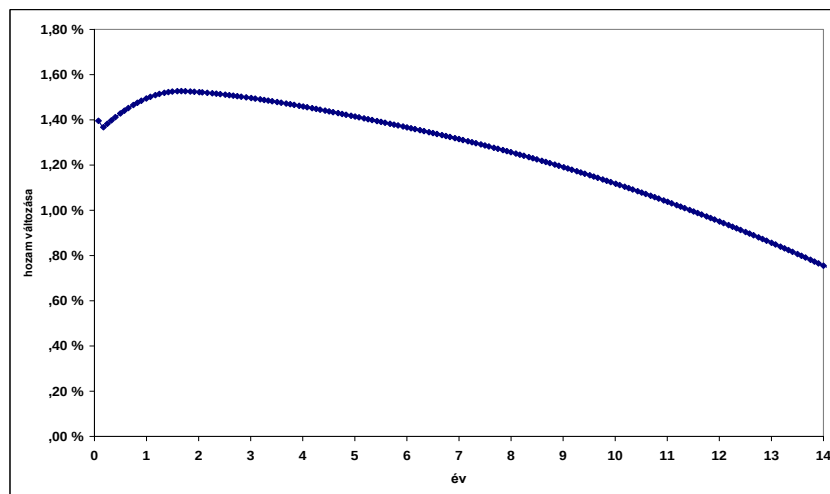


Forrás: www.akk.hu (letöltés időpontja: 2004. október 26.)

A két hozamgörbe között eltérést (százalékpontokban) a következő ábra szemlélteti, amely alapján szintén megállapítható, hogy a hozamgörbe a vizsgált időszakban nem párhuzamosan tolódott el:

²⁹ A 4. ábrán a www.akk.hu honlapon az említett dátumokra letölthető hozamgörbék adatai szerepelnek.

10. számú ábra: A zérókupon hozamgörbe elmozdulásának mértéke



Forrás: www.akk.hu (letöltés időpontja: 2004. október 26.)

Amennyiben az **optimális befektetési portfólió** meghatározása során az a célunk, hogy a hozamgörbe bármilyen fajta megváltozása esetére minimalizáljuk a kamatlábkockázat mértékét, akkor az eddigiekben bemutatott módszerek mellett további megfontolásokra van szükség. Ezekkel a kérdésekkel a tanulmány további részeiben foglalkozunk.

Források:

Banyár, J.[2003]: Életbiztosítás
Aula Kiadó

Baricz, R[1990]: Mérlegtan
Aula Kiadó

Bodie/Kane/Marcus[1996]: Befektetések.
BÉTA Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Gyenge, M[2003]: Eszközök és források a biztosítóintézetek mérlegében
Számvitel-Adó-Könyvvizsgálat 7-8. szám

OWC[2001]: Study on the risk profile and capital adequacy of financial conglomerates.
Oliver, Wyman & Company

PSZÁF[2004]: Beszámoló a felügyelt szektorok 2004. első félévi tevékenységéről.
Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete, Budapest, 2004. szeptember 22.
Sári, J – Kovács, K[1977]: Mobilitás, likviditás, diszponibilitás
KJK, Budapest

Száz, J.[2003]: Kötvények és opciók árazása. Az opciók szerepe a modern pénzügyekben.
Pécsi Tudományegyetem Közgazdaság-tudományi Kar, Pécs

Szüle, B.[2004]: Biztosítók és pénzügyi konglomerátumok az Európai Unióban.
Biztosítási Szemle, L. évfolyam, 5. szám

www.akk.hu

1.5 A csődelmélet alkalmazása

A kockázatelmélet pénzügyi eredményeknek a várttól és remélttől való eltéréseit tanulmányozza, és módszereket ajánl ezen eltérések kellemetlen következményei elkerülésére. Ennek az elméletnek része a csődelmélet, amely biztosító társaságok esetében a kellemetlen hosszú távú pénzügyi eltérések fő forrásába, a kárigények alakulásába nyújt betekintést.

Bemutatunk egy matematikai modellt, amely a *biztosító többletének* az alakulását írja le egy több periódust magában foglaló időszakra. Többleten itt azt az összeget értjük, amellyel egy kiinduló pénzeszköz (melynek forrása az induló tőke) plusz a befolyó díjak (eszközök) összege meghaladja a kifizetett kárt (kötelezettségek). A többlet ilyen meghatározásban természetesen nem teljesen számviteli kategória, nagy bajt okoz azonban, ha negatívvá válik. A bemutatott modell azt vizsgálja, hogy ez milyen valószínűséggel következhet be, és hogyan lehet ezt a valószínűséget csökkenteni.

Vizsgáljunk egy több periódusból (évből, negyedévből) álló időszakot. Tegyük fel, hogy minden egyes periódusban ugyanannyi díj folyik be, jelölje ezt c . Jelölje S_n az n -dik periódussal bezáróan összesen kifizetendő (aggregált) kárt. Jelölje U_n a biztosító többletét az n -dik periódus végén, $u = U_0$ a kezdeti többlet. Mivel a pénzáramlást modellünkben csak a befolyó díjak és a kifizetett károk határozzák meg, a modell befektetésből származó bevétellel és költségekkel csak közvetve számol. Az n -dik periódus végén ($n = 1, 2, 3, \dots$) a biztosító társaság többlete így alakul:

$$U_n = u + c \cdot n - S_n.$$

Az S_n aggregált kár az egyes periódusokban kifizetett károk összege:

$$S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

ahol W_1 az első, W_2 a második, stb., W_n az n -dik periódusban kifizetett (kifizetendő) kár nagysága, mindegyik valószínűségi változó, egymástól függetlenek. Feltételezzük továbbá, hogy azonos eloszlásúak, jelölje W a közös eloszlású valószínűségi változót, amelynek a lehetséges értékei (lehetséges realizációi), a jelentéséből adódóan, nemnegatívok.

Valószínűségi változó. Lehet diszkrét és folytonos, mindkét esetben eloszlásával írjuk le. Folytonos valószínűségi változót sűrűségfüggvénye jellemzi. Az egyik leggyakrabban alkalmazott folytonos valószínűségi változó a normális eloszlású, amelyet a jól ismert Gauss görbe jellemez.

Diszkrét valószínűségi változót lehetséges értékeivel és azok bekövetkezési valószínűségeivel adunk meg. Például egy periódusban a biztosítási szerződésben vállalt W kárértéket, mint valószínűségi változót teljes körűen megadjuk, ha közöljük, hogy e kárérték pontosan $0, 10, 20$ vagy 30 egységnyi (1000 Ft, 100 euró, stb.) lehet, és ismeretesek e kárértékek bekövetkezési valószínűségei: $P(W = 0) = 9/10, P(W = 10) = 1/40, P(W = 20) = 5/80, P(W = 30) = 1/80$. A valószínűségi változó várható értékét úgy számoljuk, hogy minden lehetséges értékét megszorozzuk a hozzá tartozó valószínűséggel, és e szorzatokat összeadjuk. A példaként vett W valószínűségi változó várható értéke a következő: $E[W] = 0 \cdot 9/10 + 10 \cdot 1/40 + 20 \cdot 5/80 + 30 \cdot 1/80 = 1,875$. A W valószínűségi változó variánciája a $(W - E[W])^2$ valószínűségi változó várható értéke. Példánkban ez a következő: $Var[W] = 9/10 \cdot (0 - 1,875)^2 + 1/40 \cdot (10 - 1,875)^2 + 5/80 \cdot (20 - 1,875)^2 + 1/80 \cdot (30 - 1,875)^2$. A W valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye egy r értékre az $\exp(Wr)$ várható értéke: $M_W(r) = E[\exp(Wr)]$. Példánkban az $\exp(Wr)$ valószínűségi változó lehetséges értékei: $\exp(0)=1, \exp(10r), \exp(20r), \exp(30r)$, várható értéke tehát: $M_W(r) = 9/10 + 1/40 \exp(10r) + 5/80 \exp(20r) + 1/80 \exp(30r)$, amely minden valós r értékre kiszámítható.

Fel kell tennünk, hogy W várható értéke: $E[W]$ kisebb, mint a c díj. Mint ismeretes, az $E[W]$ érték maga a nettó díj a biztosításmatematikai számításokban, ezért ez a feltevés azt fejezi ki, hogy a díj magában foglal egy olyan részt is, amely a biztosító társaság kockázatát, költségeit és profitját is figyelembe veszi. A díj és a várható kár különbsége a biztonsági pótlék. Az a tény, hogy minden periódusban azonos összegű befolyó díjról és azonos eloszlású kárnagyságról beszélünk, azt mutatja, hogy lényegében zárt biztosítási állományt képzelünk el. Ilyen lehet például egy régóta működő, stabilizálódott nagy munkahelyi nyugdíjpénztár, amely a járadékot egyösszegű szolgáltatás formájában nyújtja és az állományból kikerülő és oda bekerülő biztosítottak az állomány összetételét nem változtatják meg lényegesen. (Azonos összegeken persze azonos jelenértékű összegeket értünk.)

Fejezzük most ki formulával azt, ha a biztosító többlete negatívvá válik, vagyis csődbe kerül. Jelölje T azt az első időpontot (periódus sorszámot), amikor ez bekövetkezik:

$$T = \min \{n : U_n < 0\}.$$

Világos, hogy T lehet végtelen is, ez azt jelenti, hogy a belátható időben nem következik be csőd: $U_n \geq 0$ minden n -dik periódusra. Minthogy az egyes periódusokban kifizetett károk nagysága valószínűségi változó (közös eloszlásukat W eloszlásával adjuk meg), ezért U_n és T

is valószínűségi változók. Nyilvánvaló, hogy annak a valószínűsége, hogy csőd bekövetkezik, függ attól, mennyi volt az u kezdeti többlet. Az alábbi kifejezésben a csőd valószínűségét az u függvényében írjuk fel:

$$\psi(u) = P\{\tau < \infty\}.$$

A csőd valószínűségére jól alkalmazható az alábbi tételt, amely így szól:

Tétel: Minden $u > 0$ értékre

$$\psi(u) \leq \exp(-Ru),$$

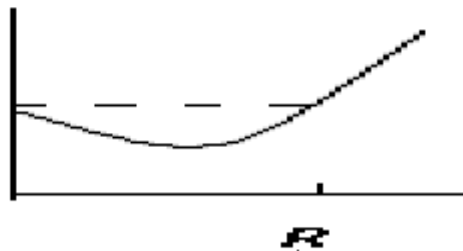
ahol R az u.n. *illeszkedési együttható* a következő egyenlet pozitív megoldása:

$$\ln M_W(r) = cr \Leftrightarrow M_W(r)e^{-cr} = 1.$$

$M_W(r)$ pedig a W valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye:

$$M_W(r) = E[\exp(r * W)].$$

Az $M_W(r)e^{-cr}$ függvény alakját az alábbi ábra mutatja:



Az egyenlet megoldható, ha a W kármagyság lehetséges realizációi között c -nél nagyobb értékek is előfordulnak.

Lássunk erre egy példát.

Legyenek W lehetséges értékei $0, 10, 20$ és 30 , amelyeket sorra $9/10, 1/40, 5/80, 1/80$ valószínűséggel vesz fel. Legyen az éves díj $2,5$ (egység). Hogyan válasszuk meg a kezdeti többlet értékét, hogy annak a valószínűsége, hogy a belátható időben csőd következik be, ne haladja meg az 5%-ot?

A megoldáshoz ellenőrizzük, hogy adataink megfelelnek a tétel (ésszerű) feltételeinek: (a) Fennáll, hogy a díj magasabb a kár várható értékénél; (b) A kár lehetséges realizációi között van a díjnál magasabb érték.

Írjuk fel az illeszkedési együttható meghatározására szolgáló egyenletet. Ez a következő:

$$\ln M_W(r) = \ln\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{40}e^{10r} + \frac{5}{80}e^{20r} + \frac{1}{80}e^{30r}\right) = 2,5r$$

Ezt az egyenletet számológéppel könnyen megoldhatjuk. Próbálkozással is megkaphatjuk az $R = 0,029$ közelítő értéket. Tudjuk, hogy csőd bekövetkezésének a valószínűsége adott u kezdeti többlet esetén kisebb vagy egyenlő, mint

$$\exp(-Ru) = \exp(-0,029u).$$

Tegyük egyenlővé e kifejezés értékét a megadott 5%-kal. Figyelembe véve, hogy

$$e^{-0,029u} = 0,05 \rightarrow u = -\frac{1}{0,029} \ln 0,05 = 103,$$

arra a következtetésre jutunk, hogy ha az u kezdeti többlet legalább 103 (egységnyi, ugyanabban a pénzegységben, amelyben a kárnagyságot és a díjat is számoltuk), akkor legfeljebb 5% annak a valószínűsége, hogy a belátható időben csőd következik be.

Világos a fenti tételből, hogy az R illeszkedési együttható növekedése jótékony csökkentő hatással van a csőd bekövetkezésének valószínűségére, ezért R egyfajta biztonsági mutató szerepét is betölti. Különösen viszontbiztosítási lehetőségek közötti választás esetén érdemes kiszámolni a kapcsolódó illeszkedési együtthatót, amely a várható nyereséggel is összevetve orientálhatja a döntést.

A modell felírásában elsősorban Newton L. Bowers, Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt: Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois (1986) könyvre támaszkodtunk.

E modell viszontbiztosítási alkalmazásáról magyar nyelven Komáromi Éva: A nem-életbiztosítás matematikai módszerei, Aktuárius Jegyzetek 6 (2001) c. jegyzetben lehet bővebben tájékozódni.

1.6 Portfólió-választás várható vagyon-hasznosság maximalizálásakor

Ebben a részben olyan befektetőről beszélünk, aki befektetési alternatíváit azok várható hasznossága szerint rangsorolja.

Tegyük fel, hogy a befektető W vagyonnal rendelkezik és hasznossági függvénye szigorúan növekvő konkáv függvény. Portfólióját adott n fajta értékpapírból állítja össze, amelyekből származó jövedelmek ugyanazon későbbi időpontban esedékesek. Az egyes értékpapírok (vagyonlemek) ára $P_1, \dots, P_n$ a döntés időpontjában ismeretes. Az egyes értékpapírok egy-egy egységéből származó jövendő $d_1, \dots, d_n$ jövedelmek azonban valószínűségi változók, de ismert valószínűségi eloszlással. (Ez a megfogalmazás természetesen nem zárja ki a

modellből a determinisztikus bevételű vagyonelemeket, amelyek esetében a vagyonelemből egyetlen lehetséges későbbi időpontbeli jövedelem származik és biztosan: 1 valószínűséggel.)

A döntéshozó (vagyon tulajdonosa, biztosító, biztosított, stb.) gazdasági tevékenységének jövőbeli kilátásait azok „hasznosságának” várható értékével méri. A szóban forgó kilátásokat valószínűségi változók jellemzik, ezek eloszlásait rendszerint ismertnek tételezzük fel. E valószínűségi változó minden függvénye, beleértve a döntéshozó hasznossági függvényét is, szintén valószínűségi változó. A hasznossági függvény bármilyen függvény lehet. Ésszerű magatartást azonban olyan u hasznossági függvény fejez ki, amely növekvő és növekedési üteme csökkenő, azaz konkáv. A várható hasznosság elve azt jelenti, hogy a döntéshozó két gazdasági lehetőség (befektetés) közül – jelölje X és Y a megfelelő valószínűségi változókat – X -t részesíti előnyben akkor, ha X várható hasznossága nagyobb: $E[u(X)] > E[u(Y)]$.

Ha az u függvény lineáris: $u(v) = av + c$ ($a > 0$), akkor $E[u(v)] = aE[u(X)] + c$, vagyis $E[u(X)] > E[u(Y)]$ akkor és csak akkor, ha $E[X] > E[Y]$: azaz a várható hasznosság elve megegyezik a várható érték elvvel.

Jellemző hasznossági függvények:

Logaritmusfüggvény: $u(v) = a \ln v$ ($a > 0$);

Exponenciális függvény: $u(v) = -e^{-\alpha v}$, ($\alpha > 0$);

Törtekitevős hatvány függvény: $u(v) = v^\mu$, ($1 > \mu > 0$).

A befektető portfóliót szeretne összeállítani, vagyis meghatározni az egyes értékpapíroknak azt a mennyiségét, amelyekkel ezek a portfólióban szerepelnek. Jelölje e meghatározandó mennyiségeket – változókat – $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. Ekkor a befektető vagyona a szóban forgó későbbi időpontban

$$x = \theta_1 d_1 + \theta_2 d_2 + \dots + \theta_n d_n$$

Minthogy $d_1, \dots, d_n$ valószínűségi változók, ezért x is valószínűségi változó, amelynek lehetséges realizációi és azok bekövetkezési valószínűségei a $d_1, \dots, d_n$ realizációiból és azok bekövetkezési valószínűségeiből számíthatók. A befektető tehát maximalizálni akarja a portfólióból származó jövedő x vagyona hasznosságának a várható értékét tudva, hogy jelenlegi W vagyonánál nem fektethet be többet.

Modellünk tehát a következő:

$$\begin{aligned} E[(x)] &\rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^n \theta_i d_i &= x \\ x &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^n \theta_i P_i &\leq W \end{aligned}$$

Itt $x \geq 0$ azt jelzi, hogy az x valószínűségi változó lehetséges értékei csak nemnegatívak lehetnek.

Példaként tekintsünk egy befektetést, amely 2 év múlva a befektető W vagyonát háromszorosan megtéríti, ha nagyon kedvező feltételek állnak be, visszakapja vagyonát közepesen kedvező feltételek mellett, és teljes egészében elveszti, ha rosszul alakulnak a dolgok. E három állapot valószínűségei sorra: 0,3; 0,4; 0,3. A várható megtérülés tehát: $0,3 \cdot 3 + 0,4 = 1,3$. Ez azonban csak egy kicsit kedvezőbb, mint ha kockázatmentes értékpapírba fektet, amelynek megtérülése 1,2-szeres. Kérdés, vagyonából mennyit kellene e kockázatos befektetésben és mennyit kockázatmentes értékpapírban tartania, ha hasznossági függvénye a logaritmus függvény és mindkét befektetés egységára azonos: egy értékű?

Két változónk van tehát: θ_1 és θ_2 . Foglaljuk táblázatba az adatainkat:

12. számú táblázat

Állapotok:	Valószínűség	Kockázatos befektetés	Kockázatmentes befektetés	A portfólió realizációi
Nagyon kedvező	0,3	3	1,2	$3\theta_1 + 1,2\theta_2$
Közepesen kedvező	0,4	1	1,2	$\theta_1 + 1,2\theta_2$
Kedvezőtlen	0,3	0	1,2	$1,2\theta_2$
Ár		1	1	$\theta_1 + \theta_2$

Megoldandó feladatunk a következő:

$$\begin{aligned} 0,3\ln(x_1) + 0,4\ln(x_2) + 0,3\ln(x_3) &\rightarrow \max \\ 3\theta_1 + 1,2\theta_2 &= x_1 \\ \theta_1 + 1,2\theta_2 &= x_2 \\ 1,2\theta_2 &= x_3 \\ \theta_1 + \theta_2 &\leq W \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg a feladatot. Elhagyjuk az első feltételcsoportot és x_i ($i = 1, 2, 3$) megfelelő értékét behelyettesítjük a célfüggvénybe. Ez azt is lehetővé teszi, hogy az x nemnegativitására vonatkozó feltételt elhagyjuk, mert a $\ln$ függvény alkalmazásával az argumentumot automatikusan pozitívnak írjuk elő. Végül a $\theta_1 + \theta_2 \leq W$ feltétel az optimális megoldásban, a logaritmussfüggvény növekvő volta miatt, szükségképpen egyenlőséggel teljesül. Marad tehát a következő feladat:

$$E \left[u \left(\sum_{i=1}^n \theta_i d_i \right) \right] = 0,3 \ln(3\theta_1 + 1,2\theta_2) + 0,4 \ln(\theta_1 + 1,2\theta_2) + 0,3 \ln(1,2\theta_2) \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^n \theta_i P_i - W = \theta_1 + \theta_2 - W = 0$$

A konvex programozás irodalmából ismeretes, hogy e feladat optimális megoldása kielégíti a következő u.n. egyensúlyi feltételeket:

$$\nabla L(\theta_1, \dots, \theta_n, \lambda) = \nabla E \left[u \left(\sum_{i=1}^n \theta_i d_i \right) \right] - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \theta_i P_i - W \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \theta_i P_i = W$$

ahol L a feladat Lagrange függvénye, ∇ a gradienst jelöli, λ pedig az egyetlen megmaradt feltételünkhöz tartozó duális változó.

Példánkban ez a feltételrendszer a következőket jelenti: Mivel a $\ln$ függvény θ_i szerinti deriváltja az argumentum reciproka szorozva az argumentum θ_i szerinti deriváltjával, ezért a példa feladat egyensúlyi feltételei így néznek ki:

$$-\frac{0,3 \cdot 3}{\theta_1 \cdot 3 + \theta_2 \cdot 1,2} - \frac{0,4}{\theta_1 \cdot 1 + \theta_2 \cdot 1,2} + \lambda \cdot 1 = 0$$

$$-\frac{0,3 \cdot 1,2}{\theta_1 \cdot 3 + \theta_2 \cdot 1,2} - \frac{0,4 \cdot 1,2}{\theta_1 \cdot 1 + \theta_2 \cdot 1,2} - \frac{0,3 \cdot 1,2}{\theta_2 \cdot 1,2} + \lambda \cdot 1 = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 = W$$

E három egyenlet három ismeretlenét W függvényében ki tudjuk számítani. Az eredmény: $\theta_1 = 0,089W$, $\theta_2 = 0,911W$, $\lambda = 1/W$. Más szavakkal, a befektetőnek vagyona 8,9%-át érdemes a kockázatos és 91,1%-át a kockázatmentes befektetésben tartani – legalábbis a következő két évre a példában bemutatott körülményben.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a modellben nem zártuk ki, hogy valamelyik θ_i változó negatív legyen, azaz nem zártuk ki az u.n. „rövidre eladás” (short selling) lehetőségét. Természetesen kizárhatjuk. Ekkor egy további feltételcsoportot alkotnak a θ_i változókra

vonatkozó nemnegativitási feltételek. (Példánkban ugyan ilyen feltétel nem szerepel, az optimális portfólió azonban negatív befektetést így sem tartalmaz.) Kiegészíthetjük, az adott helyzettől függően, más feltételekkel is a feladatot, pl. adhatunk felső korlátot a portfólió varianciájára, stb. A feladat megoldását illetően a kiegészítések azzal a következménnyel járnak csupán, hogy explicit formulák helyett számítógépes program adhatja meg az optimális portfóliót.

1.7 Egyszerű ALM modell felépítésének lépései

Mivel a valóságban számos befektetési lehetőség van, és a biztosítási tartam hossza is változó, számos feltételezéssel kell élnünk a modellépítés során:

- a) hogyan alakul az eszközök hozamainak valószínűségi eloszlása a tartam során,
- b) a lehetséges befektetési kombinációk előállítása mellett hogyan alakul a befektetési portfólió teljesítménye,
- c) milyen a jövőbeni kötelezettségek pénzáramlása (milyen időpontokban és mekkora összegek kerülnek kifizetésre),
- d) egyes portfóliókombinációk mellett hogyan, milyen valószínűséggel sikerül kielégíteni a kötelezettségeket, hogy alakul a biztosító kockázata.

E lépéseket követve **Anthony Dardis és Vinh Loi Huynh** 1995-ben vázoltak egy ALM modellt³⁰, amelynek a **kockázat** a központi fogalma. Nem vesznek figyelembe jutalékot és költséget, a halandóság alakulását az angol férfi néphalandósági tábla szerint tételezik fel. Díjfizetés évente, az év elején, kárkifizetés pedig az adott év közepén van. Nem szerepel a modellben expliciten az, hogy különböző biztosítások léteznek, és az sem, hogy az évek során ezek aránya változhat.

Modelljük alapegyenlete szerint a t -edik év végén az alapnak a kötelezettségeket kielégítő, ún. célértéke F_t , amely 4 tényező értékének ismeretében számolható ki:

- F_{t-1} , az előző év végén meghatározott célalap nagysága

³⁰ A modell forrása: A new Asset-Liability Management Model, Presented to The Staple Inn Actuarial Society, 1995. február 7.

- P_t , a t -edik év elején befolyt éves nettó díj
- i , a nettó díj számításához használt technikai kamatláb
- C_t , a t -edik év során bekövetkezett kárfizetés, a feltevés szerint fél évkor kerül sor a kifizetésre.

$$F_t = (F_{t-1} + P_t)(1+i) - C_t(1+i)^{1/2}$$

Ha a tényleges befektetési alap nagysága tartósan elmarad a célalaptól, a biztosítónak pénzügyi nehézségei lesznek.

Vizsgáljuk meg részletesebben a négy lépés során alkalmazott feltevéseket.

a) Az eszközök hozam-alakulásának feltételezése

Mielőtt az eszközök hozamának alakulására eloszlást feltételezünk, arra is feltevéssel kell élnünk, hogy milyen eszközök állnak majd a befektetők rendelkezésére. Az itt bemutatásra kerülő ALM-95 modellben csak államkötvények és brit részvények közötti eszközallokáció megengedett. Modelljüket statisztikai okokból korlátozták így, mert e két eszköz árfolyamának alakulása ismert 1923-1992 között, így az idősorokból a hozamok meghatározhatók, és az empirikus eloszlások előállíthatók. A brit hozam adatok a tesztek alapján véletlenszerűen követik egymást, ezért sem autokorreláció, sem a kötvények és a részvények hozamai közötti korreláció nem szerepel a modellben.

Ebben a lépésben követett megoldásuk hazánkban csak fenntartásokkal alkalmazható, mert pénzügyi idősoraink nagyon rövidek.

b) A befektetési portfólió hozamának alakulása

A modell szerzői azt javasolják, hogy minden egyes befektetési lehetőség hozamaira külön-külön generáljunk Monte Carlo szimulációval véletlenszerű hozamrátákat. Ezekből készítsünk minden lehetséges összetételben befektetési portfóliókat, hogy becsülhessük a portfólió hozamát. Az összetételt 1%-os lépésközzel változtassuk.

A szerzők által feltételezett zérus értékű korreláció egyszerűsíti a hozam-kockázat számításokat, mivel így a portfólió varianciája az egyedi varianciák súlyozott összege.

Ugyanakkor elveszítjük ebben a modellben azt a kockázatsökkentési lehetőséget, ami negatív korreláció esetén az immunizáció eredményeként elérhető.

c) A kötelezettségek várható pénzáramlása

Az F_t célalapnak meg kell egyeznie a jövőbeni becsült kötelezettségek N_t értékével, amit szimuláció segítségével határoznak meg a szerzők. A t index a biztosítás tartamáig (n -ig) fut.

Az F célalap is különböző technikai kamatlábak mellett került meghatározásra.

A t -edik évben a várt kötelezettség értékét 4 tényező determinálja:

- N_{t-1} , az előző év végén meghatározott kötelezettség nagysága
- P_t , a t -edik év elején befolyt éves nettó díj
- s_t , a t -edik évre szimulált éves hozam
- C_t , a t -edik év során bekövetkezett kárfizetés, a feltevés szerint fél évkor kerül sor a kifizetésre.

$$N_t = (N_{t-1} + P_t)(1+s_t) - C_t(1+s_t)^{1/2}$$

Az egyes portfólió kombinációk belső megtérülési rátája (r) a szimulált hozamokból állítható elő:

$$r = \left[\prod_{t=1}^n (1 + s_t) \right]^{1/n} - 1$$

d) A biztosító kockázatának alakulása

A várt kötelezettség és a célalap nagyságát évről évre összevetik, amíg a biztosítás tartama le nem telik.

Fizetéseképtelenség (kockázat) lép fel, ha három egymást követő évben az $N_t < F_t$ áll fenn, azaz:

$R=1$, ha $N_t < F_t$ és $N_{t-1} < F_{t-1}$ és $N_{t-2} < F_{t-2}$ minden t -re, ahol $3 \leq t \leq n$,

$R=0$ különben.

Ekkor az inszolvenca valószínűsége $= \Sigma R/m$, ahol m a szimulációk száma. A szimuláció lépésszámát úgy állapítják meg, hogy az inszolvenca (R) valószínűségére 95%-os konfidencia intervallumot határoznak meg.

A szimuláció lépésszáma

Ha az inszolvenca ($R=1$) valószínűsége p , akkor a kedvező kimenet ($R=0$) valószínűsége $1-p$ lesz. Ha a fizetésektelen pozíciók számát $X=\Sigma R$ jelöli, akkor X binomiális eloszlású, várható értéke mp és varianciája $mp(1-p)$, ahol m a szimulációk száma.

Ha m elég nagy, akkor X sztdisztribúciójú, az $(X - mp) / \sqrt{mp(1-p)}$ sztdisztribúciójú normális eloszlást követ. A p becsült értéke: X/m .

Felírva az inszolvenciára a 95%-os megbízhatósági intervallumot:

$$P((1-k)p < X/m < (1+k)p) = 0,95$$

Ha az eltérés k mértékét megadjuk, akkor ezt követően a lépésszám (m) megállapítható:

$$m = (1,96/k)^2 * (1-p)/p$$

Az optimális összetételű portfólió

A modell célja a biztosító optimális eszközallokációjának az előállítása. Az „optimális” jelző azt jelenti, hogy egyidejűleg maximalizáljuk a hozamot és minimalizáljuk az inszolvenca valószínűségét. Ez matematikai értelemben egy lineáris és egy nemlineáris programozási feladat megoldását igényli.

Keressük tehát azokat az y_i portfólió-súlyokat, amelyek mellett

- a) az A_i eszközök összhozama a lehető legnagyobb, és összesen egy fix, Z alapot fektettünk be, valamint
- b) a fenti befektetési változat mellett a fizetésektelenség valószínűsége minimális.

Az a) feltétel zárt alakban akkor adható meg, ha a hozamot képletszerűen felírjuk:

$$\begin{aligned} \sum_i y_i A_i \text{ hozama} &\rightarrow \max \\ \sum_i y_i A_i &= Z \end{aligned}$$

$$\sum_i y_i = 1 \quad \text{és} \quad 0 \leq y_i \leq 1$$

Ugyanakkor a b) feladat matematikailag jóval összetettebb, zárt alakban nem írható fel. Itt az összes hozam-szcenárió és a lehetséges portfólió kombinációk mellett kell a fizetéseképtelenség valószínűségét számszerűsíteni.

Mikor az összes elképzelhető kimenetet megvizsgáltuk, akkor az átlagos hozamot és az átlagos inszolvenca valószínűséget (kockázat) előállítjuk és ábrázoljuk. Az x tengelyre az átlagos hozamok, az y tengelyre a „kockázatok” kerülnek. A pontok száma a megvizsgált portfóliók számával egyezik meg. Érdekes azonban azokat a pontokat kihagyni, amelyeknél található magasabb hozamú és alacsonyabb kockázatú kombináció.

Nem meglepő, hogy a minimális kockázatú pont erősen függ attól, hogy milyen a kötelezettségek mértéke, ami a szimulált hozamtól függ.

Az ábra alacsony kamatláb-feltevések mellett a hatékony portfólió-ábrákhoz hasonló képet mutat. Ilyenkor ugyanis a kötelezettségek kielégítése nem okoz komoly gondot, és az ábrán a hagyományos eszközallokációs modell képe jelenik meg.

Magasabb kamatláb-feltevések esetén ritkán találunk olyan megoldást, ami a hatékony portfólió pontja.

A hatékony portfóliók közötti választást korlátozhatják, akadályozhatják a portfólió összetételét szabályozó felügyeleti vagy törvényi előírások. Hiába biztosítana minimális inszolvenca valószínűséget a 100% közeli részvény befektetés, ez a biztosító számára nem megengedett. A modellezésnek ezek a lépései tehát ország-függőek.

Már az 1990-es évek első felében felvették annak szükségességét, hogy a fizetőképességen túl az ALM egy bizonyos minimális többlet biztosítását is segítse elő. Ezt indítványozta például **Heposki** is 1994-ben, amikor ALSM néven (Asset/liability Surplus Management) új modellt dolgozott ki.

McCutcheon az eszközök és források illesztésére fókuszált, amikor azoknak a hatásoknak a figyelembe vételét javasolta, amelyek mindkét oldalra hatással vannak, mint például a valuta árfolyam, az infláció, és a kamatláb változása. Redington 1952-es cikkére hivatkozva az immunizáció fontosságát emelte ki, és illesztettnek tekintette az eszközöket és a kötelezettségeket, ha az alábbi három feltétel teljesül:

$$\begin{aligned}\sum A_t v^t &= \sum L_t v^t \\ \frac{\sum t A_t v^t}{\sum A_t v^t} &= \frac{\sum t L_t v^t}{\sum L_t v^t} \\ \sum t^2 A_t v^t &> \sum t^2 L_t v^t\end{aligned}$$

Mindhárom feltétel δ_0 kamaterősség mellett értendő, v a diszkonttényező, t az idő indexe. Az első egyenlet az eszközök (A) és a nettó kötelezettségek (L) jelenértékének egyezését, a második a diszkontált átlagidő azonosságát, a harmadik egyenlőtlenség pedig az eszközök nagyobb konvexitást irányozza elő.

Ezekből az egyszerű ALM modellekből hiányzik

- a többlethozam visszajuttatás kezelése,
- az infláció változásának figyelembe vétele, és
- a hozamgörbe alakjának vizsgálata.

1.8 Eszköz-kötelezettség menedzsment a vagyonbiztosításban sztochasztikus programozási módszerekkel

Vagyonbiztosító társaságok befektetési és biztosítási politikájukat rendszerint egy időszakra (évre) tervezik meg. Jövedelmeik az egyes befektetések hozamából és az egyes biztosítási tevékenységekből profitként származnak – ez utóbbit a biztosítási tevékenység eredményének tekintjük. Modellünkben a biztosító társaság saját tőkéje évi hozamának maximalizálását tekintjük célnak, ezért a társaság portfóliója befektetési lehetőségeket és biztosítási szerződéstípusokat egyaránt tartalmaz. Ezek egy egységéhez tartozó hozamokat normális eloszlású valószínűségi változóknak feltételezzük, és feltesszük, hogy a társaságnak más tevékenységből eredménye nem származik.

A feltételek egy részét az egyes befektetésfajták illetve biztosítási szerződéstípusok részesedésére vonatkozó korlátozások jelentik. A befektetésfajtákra a korlátozások lehetnek hatósági előírások is: a biztonság érdekében a befektetési állományban a kockázatos

értékpapírok maximális arányát jogszabály írja elő. A biztosítási portfólió elemek mennyiségére is ésszerű előírni korlátozásokat, hiszen széleskörű biztosítási termékajánlattal rendelkező társaságok egyik évről a másikra drasztikusan nem növelhetik és nem csökkenthetik állományukat lényeges piaci veszteség nélkül. A következő feltételt a biztosítási díjbevételek, illetve a kárfizetések saját tőkéhez viszonyított aránya jelenti, amely arányra felső korlátot, a szolvencia érdekében, szintén jogszabály mond ki³¹.

Miután célunk egy egyszerű, jól strukturált modell kidolgozása volt, annak felépítés során természetesen egyszerűsítésekkel kellett élnünk. Ilyen egyszerűsítést jelent az is, hogy a Rendelkezésre álló szavatoló tőke helyett számításaink során a Saját tőkét alkalmazzuk az összefüggésekben, amely a társaságok többségénél jó közelítést adhat. Ugyancsak egyszerűsítést jelent, hogy a díjbevétellel jellemezzük a minimális szavatoló tőke meghatározása során a bevételi indexben a Bit által „a” változóként definiált tényezőt, illetve a kárfizetéssel a kárindexben megjelenő „b” tényezőt. A harmadik egyszerűsítés erre vonatkozóan, hogy a saját kármegtartás indexét 1-nek tekintjük.

A biztosítási díjbevételek befektethető részaránya illetve a szolgáltatások kifizetéséhez szükséges likvid eszközrész leírása szerepel az utolsó feltételben.

Minthogy a hozamráták valószínűségi változók a modellben (és a valóságban is), ezért a saját tőke hozama is valószínűségi változó, így maximalizálni csak a várható értékét lehet, vagy, amint a modellünkben tesszük, maximalizálni annak a valószínűségét, hogy e hozam egy elfogadhatónak tartott hozamnál nem lesz kisebb.

A saját tőke jelenlegi mennyiségét a következőkben egy értékűnek tekintjük. Ez csak annyit jelent, hogy ez a pénzürtékegység a modellben, a továbbiakban minden pénzürtéket ebben mérünk.

Soroljuk fel a modellben szereplő fogalmakat és jelöléseket és fogalmazzuk meg a feltételeket.

$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ jelöli az n fajta befektetési lehetőség évi hozamrátáját, $\rho_{n+1}, \rho_{n+2}, \dots, \rho_{n+h}$ jelöli a h fajta biztosítási szerződéstípus évi hozamrátáját (profitrátáját) – valószínűségi változók, együttes valószínűségi eloszlásuk normális. Ismert a várható értékük és kovarianciáik, az i -dik hozamráta várható értéke: $E[\rho_i] = r_i$, az i -dik és j -dik kovarianciája: $\text{cov}(\rho_i, \rho_j)$, $(i = 1, \dots, n+h; j = 1, \dots, n+h)$;

³¹ 2003. évi LX. törvény a biztosítókról és a biztosítási tevékenységről (Bit) 8. számú melléklete

$x_1, x_2, \dots, x_n$ az n befektetési lehetőség mennyisége és $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+h}$ a h biztosítási szerződéstípus díjbevételeiből a kötelezettség teljesítésére fordított mennyiségek (a továbbiakban díjbevétel nélkül ezt értjük) a portfólióban – egyúttal ezek a saját tőkéhez viszonyított arányok is, hiszen a saját tőke értéke 1. Ezek az értékek együttesen képviselik a portfólió összetételét. A modellben ezeket fogjuk meghatározni, ezek a modell változói.

$$x' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n, x'_{n+1}, \dots, x'_{n+h}\} \text{ és}$$

$$x'' = \{x''_1, x''_2, \dots, x''_n, x''_{n+1}, \dots, x''_{n+h}\}$$

$n+h$ komponensű vektorok az egyes befektetési ill. biztosítási portfólió elemek mennyiségére - saját tőkéhez viszonyított arányára - előírt alsó és felső korlátok.

A portfólió összetételnek tehát teljesítenie kell az alábbi feltételeket, amelyek a modell első feltétel csoportját alkotják:

$$x'_i \leq x_i \leq x''_i \quad i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+h.$$

π a saját tőke éves hozama: a befektetésből származó hozam és a díjbevételekből származó profit összege³²:

$$\pi = \sum_{i=1}^n x_i \rho_i + \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i \rho_i = \sum_{i=1}^{n+h} x_i \rho_i.$$

π szükségképpen valószínűségi változó, normális eloszlású, hiszen normális eloszlású valószínűségi változók összege. Várható értéke és kovarianciája, mint ismeretes, így számolható:

$$E[\pi] = \sum_{i=1}^{n+h} x_i \rho_i, \quad \sigma^2 = \text{Var}[\pi] = \sum_{i=1}^{n+h} \sum_{j=1}^{n+h} x_i x_j \text{cov}(\rho_i, \rho_j).$$

Mint ahogy a díjakat előre fizetik, és lényeges időbeli eltérés lehet a kárkifizetés és a kár bekövetkezése között, a díjtartalék egy része befektethető. Hogy milyen része, az függ a szóban forgó biztosítási terméktől, a kárrendezés időtartamától. Jelölje

$$\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_{n+h}$$

az első, a második, ..., a h -dik biztosítási termék esetében a díjbevételnek a szolgáltatás teljesítésére szánt részének – a díjtartaléknak - a befektethető arányát.

³² Miután korábban már rögzítettük, hogy a biztosító az alaptevékenységén kívül más tevékenységet nem végez, így eredménye tulajdonképpen a Biztosítástechnikai eredményt jelenti. Jelen esetben így a saját tőke éves hozamát az alaptevékenységből származó díjbevétel-kárkifizetés különbözet, illetve a befektetésekből származó eredmény jelenti.

Fogalmazzuk meg, hogy a befektethető alapok forrásainak és azok felhasználásának egyensúlyban kell lennie: Az összes befektetés a saját tőkének és a díjbevétel befektethető részének az összege:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 + \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i \gamma_i ,$$

az értékegyenletben 1 a saját tőke mennyisége.

A biztosítási díjbevételek, illetve a kárfizetések saját tőkéhez viszonyított arányára – a korábban már vázolt egyszerűsítésekkel – alsó korlátot - a szolvencia érdekében - rendszerint jogszabály mond ki. Itt ezt az arányt δ jelöli. A biztosító társaságnak nem lehet érdeke, hogy a szükségesnél nagyobb saját tőkével rendelkezzen, ezért a következő feltétel ezt az előírást egyenlőség formájában mondja ki:

$$\sum_{i=n+1}^{n+h} x_i = \delta .$$

A kárfizetés rendszerint a beérkező díjbevételekből történik. Ha ez nem elegendő, akkor a biztosítónak készpénzzé kell tennie eszközeinek egy részét. Ezért a biztosító társaság elég likvid eszközzel kell, hogy rendelkezzen ahhoz, hogy a készpénzfizetési kötelezettségének eleget tehessen. Nézzük, miből származhat a társaságnak készpénze?

- (1) Készpénzzé teheti az eredmény képződése előtti vagyonából a likvid befektetéseit teljes egészében, valamint azokból képződött hozamot,
- (2) az eredmény képződése előtti vagyonából a nem likvid befektetéseinek likvid részét illetve az azokból képződött hozamot: l_i és d_i jelöli ezeket ($i = k+1, \dots, n$); és
- (3) a biztosítási tevékenységből képződött profithoz kapcsolódó eszköztöbbletet.

Az n befektetési lehetőség közül az első k -t tekintjük likvid befektetésnek, a következő $n-k$ -t pedig nem likvid befektetésnek.

Következő egyenlőség ezt az összefüggést fogalmazza meg. A biztosító készpénzének és likvid eszközeinek összege valószínűségi változó, y jelöli:

$$y = \sum_{i=1}^k x_i (1 + \rho_i) + \sum_{i=k+1}^n x_i (l_i + d_i) + \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i \rho_i .$$

A hozamok sztochasztikus természete miatt nem zárhatjuk ki annak a lehetőségét, hogy a biztosító társaság nem tud eleget tenni egy fix minimális – β -val jelölt - készpénzfizetési kötelezettségének. E modellben a biztosító kockázati szintjét ennek az eseménynek a bekövetkezési valószínűsége képviseli. Ezért olyan portfólió összetételt keresünk, amely azt a

feltételt is kielégíti, hogy a biztosító kockázati szintje ne legyen nagyobb egy előre megadott α értéknél:

$$P\{\Psi < \beta\} \leq \alpha.$$

(Ez azt jelenti, hogy a biztosító társaság a minimális fizetési kötelezettségének az idő legfeljebb $\alpha \cdot 100$ százalékában nem tud eleget tenni.)

A biztosító társaságok gyakran megállapítanak saját tőkéjükre kielégítő hozamszintet, jelölje ezt π_0 . Ezért a biztosító célja az, hogy maximalizálja annak a valószínűségét, hogy π hozama ezt a kielégítő hozamszintet eléri.

Írjuk fel a kapott sztochasztikus programozási modellt:

$$P\{\Psi \geq \pi_0\} \rightarrow \max$$

$$(1) \quad x_i' \leq x_i \leq x_i'' \quad i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+h,$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 + \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i \gamma_i,$$

$$(3) \quad \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i = \delta,$$

$$(4) \quad y = \sum_{i=1}^k x_i (1 + \rho_i) + \sum_{i=k+1}^n x_i (l_i + d_i) + \sum_{i=n+1}^{n+h} x_i \rho_i,$$

$$(5) \quad P\{\Psi < \beta\} \leq \alpha,$$

$$(6) \quad \pi = \sum_{i=1}^{n+h} x_i \rho_i.$$

A szóban forgó hozamráta mint valószínűségi változók tulajdonságainak ismeretében felírható e modell determinisztikus ekvivalens megfogalmazása is. Az átalakítás részleteitől megkíméljük az olvasót, de egy kis példán bemutatjuk a menetét. Megjegyezzük, hogy az átalakítás eredményeként kvadrátikus feladathoz jutunk, amelynek a megoldása még nagy méretek esetén sem reménytelen.

Példánkban egyetlen befektetési lehetőség van: éves ρ_1 hozamrátajának várható értéke: $E[\rho_1] = 0,12$, varianciája: $\text{Var}[\rho_1] = 0,01$. Eladható évközben.

Két biztosítási termékünk van, hozamrátajuk ρ_2 és ρ_3 , $E[\rho_2] = 0,15$, $\text{Var}[\rho_2] = 0,0025$ illetve $E[\rho_3] = 0,18$, $\text{Var}[\rho_3] = 0,0036$.

Mindhárom valószínűségi változó normális eloszlású és páronként függetlenek, ezért $\text{cov}(\rho_i, \rho_j)$ csak akkor nem 0, ha $j = i$; mint ismeretes, $\text{cov}(\rho_i, \rho_i) = \text{Var}[\rho_i]$, $i = 1, 2$.

A további paraméterértékek legyenek a következők:

$$\delta = 0,18; \alpha = 0,05; \gamma_2 = 0,5; \gamma_3 = 0,6.$$

β és π_0 értékét a feladatban nem specifikáljuk.

Írjuk fel a π és y valószínűségi változókat – (4) és (6) feltétel -, várható értéküket és varianciájukat:

$$\begin{aligned}\pi &= x_1\rho_1 + x_2\rho_2 + x_3\rho_3 \\ y &= x_1\mu_1 + \rho_1 + x_2\rho_2 + x_3\rho_3 \\ E[\pi] &= 0,12x_1 + 0,15x_2 + 0,18x_3 \\ Var[\pi] &= 0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2 \\ E[y] &= 1,12x_1 + 0,15x_2 + 0,18x_3 \\ Var[y] &= 0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg a feltételeket.

Alsó és felső korlátokat itt nem adtunk meg, ezért, mivel a portfólió összetételének komponensei értelemszerűen nemnegatívak, az (1) feltételcsoport az $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ feltételekből áll.

A (2) feltétel így alakul: $x_1 = 1 + 0,5x_2 + 0,6x_3$.

A (3) feltétel: $x_2 + x_3 = 0,18$.

Az (5) feltétel azt mondja ki, hogy annak a valószínűsége, hogy az y valószínűségi változó értéke kisebb, mint a β minimális szint, ne legyen nagyobb 0,05-nél:

$$P(\mu_1 + \rho_1 + x_2\rho_2 + x_3\rho_3 < \beta) \leq 0,05.$$

Mint hogy az $y = x_1\mu_1 + \rho_1 + x_2\rho_2 + x_3\rho_3$ normális eloszlású valószínűségi változók összege, így maga is normális eloszlású, ezért az egyenlőtlenség baloldalán lévő valószínűség a standard normális valószínűségi eloszlás Φ eloszlásfüggvényének az értéke a $(\beta - E[y]) / \sqrt{Var[y]}$ helyen. A feltétel tehát így alakul:

$$\Phi\left(\frac{\beta - 1,12x_1 - 0,15x_2 - 0,18x_3}{\sqrt{0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2}}\right) \leq 0,05.$$

A Φ eloszlásfüggvény értékei táblázatokban is megtalálhatók. Az az argumentum, amelyre Φ értéke 0,05: -1,645. Ezért az (5) feltétel így alakul:

$$\frac{\beta - 1,12x_1 - 0,15x_2 - 0,18x_3}{\sqrt{0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2}} \leq -1,645,$$

vagyis

$$-1,645\sqrt{0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2} + 1,12x_1 + 0,15x_2 + 0,18x_3 \geq \beta.$$

Végül nézzük a célfüggvényt: Annak a valószínűségét maximalizáljuk, hogy a saját tőke π hozama legalább az előre megadott π_0 értéket eléri:

$$P(\pi_1\rho_1 + x_2\rho_2 + x_3\rho_3 \geq \pi_0) \rightarrow \max.$$

Ez azonos azzal, hogy minimalizáljuk annak a valószínűségét, hogy a saját tőke π hozama kisebb az előre megadott π_0 értéknél:

$$P(\pi_1\rho_1 + x_2\rho_2 + x_3\rho_3 < \pi_0) \rightarrow \min.$$

Mint hogy π normális eloszlású, a minimalizálandó célfüggvényünk értéke:

$$\Phi\left(\frac{\pi_0 - 0,12x_1 + 0,15x_2 + 0,18x_3}{\sqrt{0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2}}\right).$$

Ez pedig akkor lesz minimális, ha az argumentum minimális.

Foglaljuk össze a modellt a példabeli feladatunkra:

$$\frac{\pi_0 - 0,12x_1 + 0,15x_2 + 0,18x_3}{\sqrt{0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2}} \rightarrow \min$$

- (1) $x_1, x_2, x_3 \geq 0,$
- (2) $x_1 = 1 + 0,5x_2 + 0,6x_3,$
- (3) $x_1 + x_2 = 0,18,$
- (5) $-1,645\sqrt{0,01x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,0036x_3^2} + 1,12x_1 + 0,15x_2 + 0,18x_3 \geq \beta.$

Megjegyezzük, hogy ez a feladat a hiperbolikus programozás körébe tartozik, mert a célfüggvénye egy tört. Ezért további olyan átalakításokra is nyílik mód, amelyek a feladat megoldását megkönnyítik.

A modell felírásához S. X. Li: A Satisficing Chance Constrained Model in the Portfolio Selection of Insurance Lines and Investments, Journal of the Operational Research Society (1995, pp:1111-1120) munkáját használtuk fel.

1.9 A Russel-Yasuda Kasai Modell: Egy többváltozós sztochasztikus programozásra épülő Eszköz-Forrás modell alkalmazása a japán biztosítótársaságoknál

A Frank Russel Társaság és a Yasuda Tűz- és tengeri biztosító Rt. kifejlesztett egy olyan ALM modellt, amely a többváltozós sztochasztikus programozásra épül. Segítségével meghatározható egy több időszakot átölelő optimális befektetési stratégia, és lehetővé teszi a

döntéshozóknak, hogy meghatározzák a működési ciklus kockázatát, emellett kezeli a japán biztosítási törvény szabályozását is. A legnagyobb érdeme, hogy a módszer alkalmazásával anélkül adható magas éves kamatjövedelem a megtakarítási típusú biztosítási kötvényekre, hogy a vállalkozás feláldozná hosszú távú vagyónmaximalizálási törekvését.

Az első két üzleti évben, amikor a modellt bevezették (1991 és 1992), az arra épülő befektetési stratégia 42 bázis pontos jövedelem növekedést eredményezett (8,7 milliárd Yen, illetve 79 millió USD).

A Yasuda Tűz- és tengeri biztosító Rt. a japán biztosítási piac vezető vállalkozása volt az elmúlt 100 évben. Yasuda Kasai bevétele alapján a második legnagyobb japán vagyón- és balesetbiztosító és a hetedik legnagyobb vagyón- és balesetbiztosító a világon. 1991 végén a Yasuda Kasai körülbelül 26,2 milliárd dollárnyi eszközzel rendelkezett.

Jelenleg a Yasudánál, ahogy minden más biztosítótársaságnál világszerte, a megtakarítási típusú kötvények tekintetében is növekedés mutatkozik amellet, hogy a kötvénykínálat a lejáratí idő tekintetében í növekszik. Ennek következtében kötelezettségei differenciáltabbak és komplexebbek, mint a múltban. Ráadásul, a biztosítási törvény és más jogszabályok jó néhány különös szabályozást tartalmaznak a biztosítók gyakorlatára vonatkozóan. Emellet a növekvő verseny í felszínre hozza az a versenyképes rövid időszak és a magasabb összjövedelmű hosszú távú időszak közötti érdekkülönbségeket. Az alapvető kérdés az, hogy hogyan lehet menedzselni a befektetéseket ilyen változó és komplex környezetben. Ez mindenképpen jobb eszközöket igényel, mint a múltban alkalmazott statikus átlagszórás módszer.

A változó japán biztosítási és pénzügyi piac miatt Yasudának szüksége volt egy átfogó ALM menedzsment modellre. Az 1980-as években a japán pénzügyi piac liberalizált és stabil volt. A „Pénzügyminisztérium” azonban fellazította a határokat a pénzügyi intézmények között azzal, hogy engedélyezte a megtakarítási típusú biztosítási termékek forgalmazását, ezáltal a bankok, *értékpapírokkal foglalkozó intézmények* és biztosítók komoly versenybe kezdtek az egyéni befektetők megtakarításának megszerzéséért. A biztosítótársaságok, mint a Yasuda, olyan biztosításokat kezdtek teríteni, amelyek megtakarítási jelleggel í bírtak.

A megtakarítási típusú kötvény egy olyan biztosítási kötvény, amely határozott időre szól, általában három-öt évre, továbbá vagyon- és balesetbiztosítás mellett egy adott összeget fizet a kötvény lejáratakor.

Ez a kötvény lejáratakor térített összeg a befizetett díj meghatározott része, valamint a kötvényben meghatározott garantált kamat. Ezen kívül a pénzügyi év végén a biztosító meghatározza és jóváírja azt a kötvény bónuszt, amelyet a garantált díjon felül fizetnek; a biztosító társaságok versenye többek között erre a bónuszra épült. A kötvényhez tartozó díj megtakarítási része többnyire annak 90 százalékát is meghaladja. Ahogy ennek a megtakarítási típusú kötvénynek a népszerűsége emelkedett, a Yasuda cégcsoport kezdett egyre nagyobb hangsúlyt fektetni ezen termékekre. Ezzel a fajta üzletpolitikai váltással Yasuda már több lett, mint egy olyan pénzügyi vállalkozás, amely egyszerűen csak vagyon- és balesetbiztosítások értékesítésével foglalkozott.

A biztosítási kötvények ilyenfajta változása mellett a „Pénzügyminisztérium” felhatalmazásával a biztosító társaságok különböző számlákat hozhatnak létre (speciális megtakarítási számlákat) ezen megtakarításos kötvényekből származó eszközök befektetésére. Korábban minden biztosításból eredő pénzösszeget egy általános számlán tartottak. Mindezek indokolják, hogy a befektetések kezelésére az eddigieknél nagyobb súlyt helyezzenek.

Egy jól definiált eszköz-forrás menedzsment modellben megjelenhetnek Yasuda többértékű és egymásnak néha ellenmondó céljai is, amelyeket ráadásul számos szabályozással is egyeztetni kellett. Ez utóbbiak egyrészt szabályozzák azt az összeget, amelyet bizonyos eszközcsoportba fektethet a vállalkozás, a szabályozók másik fajtája korlátozza a források és az alapok felhasználását. Pl. a megtakarítási számlák egy részénél a szabályozók megkívánják, hogy a biztosítási kötvény után járó kamatot a realizált jövedelem (pl. a kötvények után járó éves hozam, vagy a tőkebefektetés után járó osztalék) terhére számolják el és nem a tőkenövekmény terhére.³³

A szabályozók azért preferálják a jövedelmet, mert a magas hozamú eszközök általában fix jövedelmű eszközök, amelyek stabilabbak, ugyanakkor összességében alacsonyabb teljes hozammal járnak. Ezek a szabályozók arra késztetik a befektetőket, hogy magasabb éves hozamú befektetéseket keressenek a magas összhozamú eszközökkel szemben (pl.

³³ Megjegyzés: A tőkenövekmény alatt itt például az eszköz piaci értékének növekedését kell érteni.

diszkontkötvényeket a részvényekkel szemben). Ezek a szabályozók természetesen érdekütközéseket teremtenek, mint például az az eset, amikor a 80-as évek közepén a japán biztosítótársaságok a bevétel növelés érdekében nagy mennyiségben vásároltak olyan külföldi (ausztrál, kanadai, amerikai) kötvényeket, amelyek magas kamathozamot biztosítottak, ugyanakkor ezzel a befektetéssel a valutaleértékelődésből adódóan jövedelemcsökkenést értek el. Egy igazán jó ALM egyensúlyban tudta volna tartani a magas jövedelmet és a kötvénytulajdonosok is elfogadták volna a társaság vagyónmaximalizációra irányuló törekvését.

Yasuda célja egy olyan könnyen érthető modell megalkotása volt, amely

1. a vállalkozás könyv szerinti és piaci értékét egyaránt jól mutatja be,
2. tartalmazza a szabályozókat – ügyelve a biztosítási szabályokra és a gyakorlati lehetőségekre,
3. egyaránt kezeli a sokféle és egymással ellentétes célokat, beleértve a vállalkozás hosszú távú vagyónmaximalizálási igényét és a biztosítottaknak a magas színvonalú szolgáltatásra vonatkozó igényét,
4. figyelembe veszi, hogy ezek a célok több időperiódusra vonatkozhatnak,
5. figyelembe veszi a befektetések és a pénzügyi piac várható bizonytalanságait,
6. számítógépen maximum három órán belül futtatható,
7. elfogadható és érthető a különböző technikai háttérrel és képzettségi szinttel rendelkező menedzserek számára.

A Russel-Yasuda Kasai (RY) modellt megelőzően Yashuda a Markowitz átlagszórás modellt alkalmazta. E statikus elemzés alkalmazásánál Yasuda eredményességük szerint osztályozta a kötvényeket. Ezek után szimulálta a kötvény allokáció megtérüléseit, hogy megvizsgálja a jövedelmi igények és a szolvencia, valamint a hozzájuk kapcsolódó jövedelmek illeszkedését, illetve a tartalékkövetelményeket. Vizsgálta a juttatások nagyságát az elvárt hozamszinttel szemben, azáltal, hogy összehasonlította ezen juttatások hiányának lehetőségét egy minimum engedélyezhető „nem fizetéssel”.

Ha az adott eszközallokációs eljárás nem egyezett meg a legalacsonyabb még elfogadható „sikertelenség valószínűséggel”³⁴, akkor Yasuda tesztelt egy másik befektetési politikát egy hatékonyabb szinten, mindaddig, amíg nem garantálta, hogy a kiválasztott eljárás igazán optimálisnak tekinthető, vagy esetleg a legjobb választás. Yasuda számára ennek az eljárásnak a hátránya világos volt. Először is, statikus modellként nem tudta összehangolni az eszközök és források cash-flow-ját egy bizonyos időintervallumban. Másrészt, a teljes jövedelem változása, mint a törzstőke kockázatának mérőeszköze kicsi hasonlóságot mutatott azzal a kockázattal, amellyel a döntéshozók érzésük szerint szembesültek.

Miután a jövedelem (income return)³⁵ kiemelt jelentőséget kapott, a modell döntő fontosságú pontja volt, hogy megkülönböztette a jövedelmet (income) a teljes megtérüléstől (total return). A tanulmány bemutat egy átlagszórásra épülő modellt, amely a kockázatot a hozam változékonyságával méri, amely kevésbé alkalmas Yasuda tervezésére, mint a shortfall modellek, amelyek a kockázatot úgy mérik, mint annak a költsége, hogy a megtérülés egy adott szint alá esik.

Ezek a shortfall modellek kimondottan a pozitív csúcsosságú eloszlásokra építenek és nagyobb figyelmet fordítanak a befektetők céljaira.

Mindez nem csak egyedül Yasuda problémája. A biztosítótársaságok és egyéb pénzügyi intézmények hagyományosan aktuáriusi módszereket alkalmaznak kötelezettség oldalon és átlagszórásra épülő technikákat eszköz oldalon. Ritkán látható a két oldal találkozása úgy, ahogy azt a Russel-Yasuda Kasai modellben láthatjuk.

A korábbi modellek

A fent vázolt szimuláción és átlagszórást alkalmazó technikákon túl a kutatócsoport egy olyan metodológiát próbált kidolgozni, amely túlmutat az előbbieik korlátain. Számos olyan pénzügyi tervezési modellt talált a sztochasztikus programozáson belül, amelyek hasonló tulajdonságokat mutatnak Yasuda problémájával. Míg a megelőző modellek azt mutatták,

³⁴ „csődhelyzettel”

³⁵ Megjegyzés: A modell egyszerűsítése szerint jövedelem alatt itt a befektetés azon „elsődleges” jövedelmét kell érteni, melyet a befektetés megtartása során elérünk, amely jelenti az osztalékjövedelmet, kamatjövedelmet, de nem jelenti például az eszköz értékesítéséből adódó árfolyamkülönbséget.

hogy egy sztochasztikus programozási modellt rá lehet igazítani Yasuda modelljére, ugyanakkor Yasuda problémájának néhány fontos eleme nem volt vizsgálható a korábbi modellek kiterjesztésével sem.

Először is, a probléma nem alapvetően a fix jövedelmű értékpapírokat érinti. Bradley és Crane kötvény modellje (BONDS model), a Lane és Hutchinson modell, Dempster és Ireland, illetve Gassmann és Ireland MIDAS modellje, Saphiro sztochasztikus modellje, Hiller és Saphiro és Hiller és Eckstein mind a fix jövedelemre koncentráltak. Yasuda befektetései a „befektetések” (eszközök) minden típusát magukban foglalják. Másrészt, létezik néhány olyan, általánosan az eszközök osztályozását érintő szabályozás, amely megdőnt minden, ebben a problémakörben kidolgozott struktúrát. Harmadrészt a kötelezettségeket teljesen másképp kezelték, mint a korábbi modellek esetében.

A kutatócsoport munkáját az vezérelte, hogy egy többlépcsős sztochasztikus lineáris programozási rendszert dolgozzon ki Yasuda eszköz/forrás menedzselési problémájára. Ez a dinamikus optimalizációs modell volt hivatott arra, hogy a segítségével Yasuda olyan eszköz allokációs és forrás menedzsment döntéseket tudjon hozni, amelyek figyelembe veszik a vállalkozás üzleti környezetét meghatározó bizonytalan várható eseményeket. Ez a „környezet” tartalmazza egyrészt a jogszabályokat, a különböző érdekcsoportok céljait, az esetleges elégtelen teljesítésre való felkészülést és a jövőbeli eszközök és kötelezettségek bizonytalanságát.

A modell áttekintése

Yasuda teljes befektetés állománya különböző számlák között került szétosztásra, amely egy általános számlát, és különböző típusú megtakarításokat jelent. A modell alapvető döntési lehetősége az, hogy hogyan kerüljön szétosztásra a minden eszközt magában foglaló teljes piaci érték a különböző választható csoportok között. Ezek a választható csoportok magában foglalják mind az egyes eszközcsoportokba történő közvetlen befektetéseket, mind pedig a közvetett befektetéseket (pl. külföldi leányvállalatok keresztül, vagy tokkin³⁶ alapokban). A különböző számlák között természetesen kölcsönös kapcsolat van részben az

³⁶ Megjegyzés: A tokkin japán összetett szó, jelentése ritka nemesfém.

eszközcsoporthoz vonatkozó szabályozás miatt, részben pedig azért, mert bizonyos alapok átcsoportosításra kerülnek az egyes számlák között a pénzügyi év végén.

Az eszközérték növekmény időbeli alakulását leíró lineáris egyenletek összekapcsolják az egy bizonyos időpontbeli allokációk könyv szerinti értékét a következő időpontbeli allokációkkal, miközben a számláról, illetve számlára történő pénzáramlások elszámolásra kerülnek. A megtérülési ráta (ROR) valószínűségi változóként (random coefficients) jelenik meg a növekmény meghatározása során. Összességében a modell egyenletek a tőkeáramlás időbeli alakulását írják le az egyes számlák között.

A kötelezettségek modellje minden számlához kapcsolódik. A kötelezettség modell előre vetíti a jövőbeli pénzáramlást, amely mind a számláról, mind a számlákra történő pénzáramlást jelenti, és előre vetíti a jövőbeli kötelezettségek egyenlegét a tervezési időhorizont egy adott pillanatára vonatkozóan. A pénzáramlás és az egyenlegek körülírják mind a jelenlegi, mind azt a politikát, melyet Yashuda valószínűleg követni fog a (termék)értékesítésekre vonatkozóan a jövőben.

A kötelezettség modell a pénzáramlásokat és egyenlegeket úgy határozza meg, hogy a hasonló jellegű, különböző kötvényszektorokat egy számlára gyűjti össze, így az együttes pénzáramlás és egyenleg belső ellentmondásait kiszűri.

A hiány modell³⁷ (The Shortfall Model) és a kötelezettségek

Az átlag szórásnégyzet modell egyformán bünteti az átlagoshoz képest magas és alacsony megtérülést, ugyanakkor nem mondhatjuk, hogy a túlságosan magas megtérülés kerülendő lenne. Ebben a modellben a vállalkozás kockázatának legjobb mérőszáma az a várható érték (ha egyáltalán van olyan), amellyel a kitűzött cél nem érhető el.

Ahhoz, hogy megértsük a modell működését, ismernünk kell a kötelezettségekre vonatkozó szabályokat. Yasuda megtakarítási típusú kötvényei hasonlóan működnek, mint a „letéti elismervények”. Minden új kötvényeladás egy letétet, vagy pénzbeáramlást jelent. A kamat időszakonként kerül jóváírásra a kötvény lejáratáig, amely általában 3-5 évet jelent, amikor is a kamattal növelt tőke visszajuttatásra kerül a kötvénnytulajdonoshoz. Az alkalmazott kamat

³⁷ A korábbiakban „csődhelyzetként” definiálva.

évente kerül meghatározásra, és alapvetően az ágazati verseny alakítja ki. Ez általában olyan piaci indextől függ, mint a „prime rate”.

Egy determinisztikus modellben ez a ráta minden jövőbeli időszak vonatkozásában rendelkezésre áll, így a végső kamatfizetés mértéke és az időközi kötelezettség mértéke minden kötvényre pontosan meghatározható.

Egy sztochasztikus modellben a hitelkamatok bizonytalanok, miután mértékük a piaci környezettől függ, illetve az új kötvényértékesítések is bizonytalanok tekinthetők. Nem tudjuk biztonsággal meghatározni a jövőbeli cash flow-t sem. Ugyanakkor kalkulálni tudjuk a feltételezett kötelezettség miatti pénzáramlást, valamint a kötelezettség egyenlegét különböző szcenáriók mentén. A modell egyik fő része az, amely meghatározza ezen szcenáriótól függően az egyedi pénzáramlást és egyenlegeket, illetve a vállalkozás valamennyi kötvényére vonatkozóan ezek aggregált összegét.

A biztosítási piac működésére vonatkozó szabályok előírása szerint a bizonyos típusú biztosítási kötvényekhez kapcsolódó kamatot a befektetések hozamaiból kell fedezni.

Yasuda gyakorlatában az egyes termékcsoporthoz képest, az előírt kamatokon túl elért többletjövedelem a vállalkozás hozamaként mutatandó ki, ezáltal kedvezőbb képet festhet az eredményről a társaság. Amennyiben az elégtelen teljesítés jelei mutatkoznak, ezzel az értékkel csökkentik a teljes jövedelmet, hozzáadják azt a termékcsoporthoz jövedelméhez, ezáltal csökkentik a kimutatott eredményt.

Eszköz allokáció

Yasuda alapszabálya, hogy a letéti tőke befektetésére azért van szükség, hogy legyen honnan fedezni az esedékes kötelezettségeket. Azonban egyrészt a jogszabályi környezet is okozhat bizonyos kieséseket, hiányokat, másrészt a vállalkozásra ható piaci tényezők is. Az azonban tény, hogy az a kockázat, hogy nem áll rendelkezésre negyedévről negyedévre elégséges jövedelem, a döntéshozók szemszögéből a kockázat elsődleges összetevője. Természetesen Yasuda azt szeretné, hogy minél magasabb megtérülést produkáljanak, hogy a vállalkozás nyereséges legyen. Azonban amennyiben Yasuda döntéshozói megbizonyosodtak arról, hogy egy adott jövedelem biztosan elérhető, akkor anélkül fogják meghozni befektetési döntésüket,

hogy a teljes megtérülés volatilitását vizsgálnák. Vagyis ők a kockázatsemlegességre és a várható vagyon maximalizálásra törekednek.

A probléma természetesen az, hogy hogyan határozzuk meg a vagyon optimális eszközmegoszlását. Yasuda olyan eszközkategóriákat állított fel, amely tartalmazza a pénzt, a kölcsönöket (fix, vagy változó kamatozásút is), kötvényeket, részvényeket, ingatlanokat és más eszközöket. Ezek után tovább részletezi a kötvényeket és a részvényeket országokként, vagy országcsoportonként. Amennyiben a tőke teljes összege készpénz egyenértékes eszközben található, az eszköz növekedés állandónak tekinthető és megbecsülhető, azonban a megtérülése többnyire alacsonyabb, mint amelyet a kötvényeken bevállalt. Ezáltal mind az esedékesség időpontjában, mint pedig a köztes időszakban hiányt generált.

Többen javasolják, hogy a tőke teljes összegét fix jövedelmezőségű értékpapírokba kell fektetni. A korábban említett determinisztikus modellben (világban) ez valóban igaz lehet. Azonban a való világban a kamatráták sztochasztikusak, jóllehet a fix jövedelmű értékpapírok állandó jövedelmet terítenek szét, ugyanakkor a kamatváltozások miatt piaci értékük változik, ezáltal nem biztos, hogy a legkedvezőbb piaci áron értékesíthetők. Amennyiben azonban a tőkét részvényekbe fektetjük, akkor sem az abból származó jövedelem, sem pedig a befektetés piaci értéke nem garantált, ezért természetesen bármikor felléphet egy „hiány” állapot. Ebből következik, hogy természetesen a tőkét nem egy adott eszközbe, hanem eszköz portfólióba kell fektetni.

Egyéb feltételek

1. Indirekt befektetések

A biztosítókra vonatkozó szabályozás megkívánja, hogy a társaság a fizetendő kamatot nem a tőkenövekedésből³⁸, hanem a befektetések hozamából fedezze. Vannak olyan eszközök, mint például a leányvállalatokba történő befektetések, amelyek segítségével ez a tőkenövekmény jövedelemmé konvertálható. A leányvállalat osztalékot fizet az anyavállalatnak a tőkenövekményből, amely azt jövedelemként mutatja ki. Miután az anyavállalat közvetlen irányítást gyakorol a leányvállalat felett,

³⁸ Megjegyzés: A korábban említett income return.

a vállalkozás megteheti azt, hogy közvetlenül egy bizonyos eszközcsoportba fektet be, amely után jövedelemre tesz szert, vagy a leányvállalaton keresztül fektet be, amely során jövedelemként mutatja ki annak a bizonyos eszközcsoportnak a teljes megtérülését. Mindezek miatt az ilyen jellegű befektetések arányát különböző rendelkezések szabályozzák.

2. Egy másik nagy probléma, hogy a különböző termékcsoportokból származó pénzeszközöket elkülönített számlákon kezelik. A japán biztosítókra vonatkozó szabályozás engedélyezi speciális megtakarítással egybekötött kötvények értékesítését, amelyekre más szabályok vonatkoznak, mint az általános biztosítási kötvényekre. Ugyanakkor a szabályozás azt is előírja, hogy ezekhez a speciális kötvényekhez tartozó eszközöket az általános biztosítási kötvényekhez tartozó eszközöktől elkülönítve kell kezelni.
3. Kölcsönök és adók kérdése. Az RY modell megpróbálja kezelni a kölcsönök³⁹ nehézkes likviditását, hiszen a kölcsönök a tipikus biztosítási portfólió jelentős részét alkotják. A vállalkozásoknak és a magánszemélyeknek nyújtott kölcsönök a legáltalánosabbak. A tőzsdén jegyzett eszközöktől eltérően, melyek piaci ára és megtérülése jól mérhető, a kölcsönök piaci értékét és hozamát csak becsülni lehet. Az alkalmazott modell minden egyes scenárió mentén megbecsüli az adott eszköz piaci értékét és hozamát.

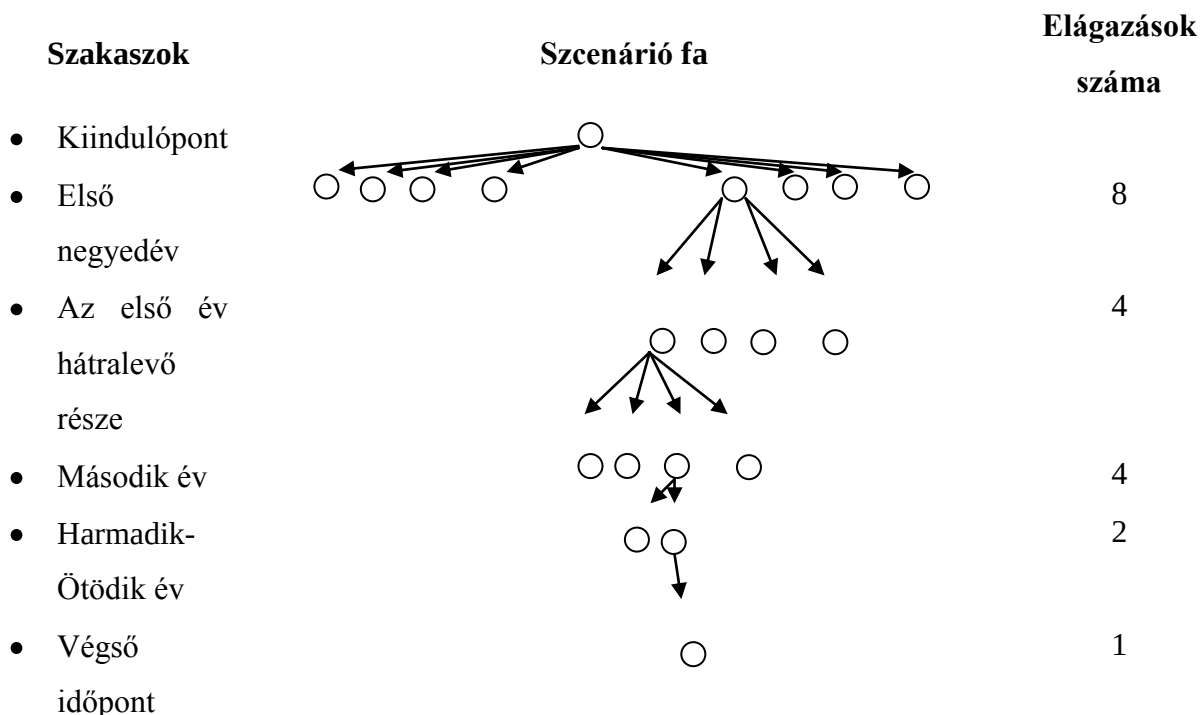
Szenárió alkotás

A sztochasztikus programozási modell megkívánja az egyes valószínűségi változók lehetséges értékeinek időbeli alakulását leíró scenáriókat. A RY modell valószínűségi változói az ár, a megtérülés minden eszközcsoport vonatkozásában, illetve a kötvényhez tartozó jóváírás rátája. A scenárió inputok megalkotása analóg ahhoz, ahogy az átlagok, varianciák és korrelációs együtthatók meghatározandók az átlag-variancia modell számára, hiszen ezek fejezik ki végső soron a döntéshozók lehetséges várakozásait.

A modellt megalkotó kutatócsoport vizsgálatai azt mutatják, hogy az eszközallokációs modell jósága jelentősen függ azoknak előrejelzések minőségétől, amelyek a létrehozott scenáriókon alapulnak.

³⁹ Megjegyzés: Ez nem csupán a kölcsönökre igaz, hanem minden követelésre.

11. számú ábra



A szcenáriók száma összesen: 256

Forrás: Worldwide Asset-Liability Models, Cambridge University Press, 1998. p. 620..

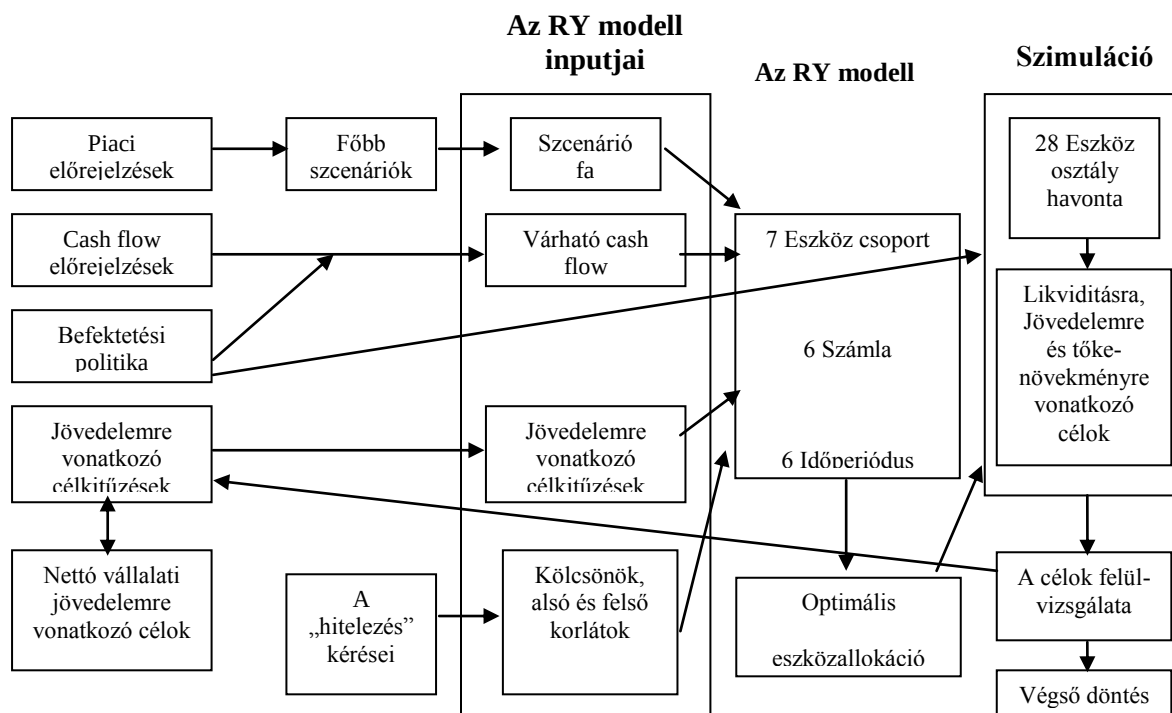
Minden egyes csomópont valamennyi valószínűségei változó egy lehetséges kimenetelét jelenti az adott szakaszra vonatkozóan. Minden útvonal a fán egy-egy szcenáriót jelent. A sztochasztikus program méretét a csomópontok száma határozza meg. Azért, hogy a program könnyebben kezelhető legyen, az elágazások száma szintenként egyre kisebb. A fa struktúra leírásához a kutatócsoport rögzítette az egyes elágazások számát minden szint esetében. Így az 1-8-4-4-2-1 elágazásos fa 256 szcenáriót eredményezett.

A fa tartalmazza az induló állapotot, az első negyedév végi, az első év végi, második év végi, illetve ötödik év végi adatokat, valamint a végso állapotot.

A következő ábra azt mutatja, hogyan illeszkedik a szcenárió alkotás Yasuda eszköz-forrás döntési folyamatába.

A folyamat azzal kezdődik, hogy megpróbálják rögzíteni a piaci előrejelzéseket, szcenáriókat, a jövőbeli cash-flow-t, a célokat, a kölcsönök (követelések) mértékét és más input tényezőket. Ezek után futtatják a modellt, szimulálják az eszközallokációt, újra áttekintik a célokat és meghozzák a végso döntést.

12. számú ábra



Forrás: Worldwide Asset-Liability Models, Cambridge University Press, 1998. p. 621.

A scenárió-generáló modul három lehetséges úton szimulál eszközmegtérüléseket. Az első úgy hozza létre ezeket a megtérüléseket, hogy azok időszakonként függetlenek legyenek. A második a megtérüléseket egy faktor modellből hozza létre, amely beépíti az egyes időszakok között függőséget. A harmadik megengedi a felhasználónak, hogy minden elágazásnál specifikálja a véletlen eszközmegtérüléseket. Az első két módszer esetén a számítógép hozza létre a scenáriókat, ez megkönnyíti a felhasználó munkáját. A harmadik megoldás több munkát kíván, azonban a felhasználónak nagyobb lehetősége van a scenáriók és a fa struktúra alakítására.

A scenáriók alakításának első módjánál, ahol a sztochasztikus kimenetek időperiódusonként függetlenek, a felhasználó csoportokat képez minden egyes szakasz teljes megtérülési outputjaira. Van olyan modell, ahol ezeket a megtérüléseket egy eszközmegtérülési modellből generálják véletlen mintavétellel, van, ahol egyszerűen csak a múltbeli adatokat használják, vagy, ahogy azt Yasuda is teszi, a scenáriók összességét az előrejelzések és becslések kombinációjából alakítják ki. A fent említett csoportok képzésével a modell csökkenti az

egyes szakaszok végeredményeinek számát a fa struktúra által meghatározott kimenet számra. Ez a redukciós módszer megőrzi a csoport legfontosabb jellemzőit (az átlagot és a szórást) egészen addig, amíg a kimenetek száma könnyen kezelhető nagyságúra csökken.

A módszer azzal kezdődik, hogy párokat képeznek a lehetséges kimenetekre és meghatározzák az új, összevont kimeneteket minden pár vonatkozásában.

Az új kimenet valószínűsége egyszerűen az eredeti kimenet-pár valószínűségének összege lesz. Ebben a megközelítésben a módszer a lehetséges kimenetek számát felére csökkenti.

Ennek a módszernek az egyik jellemzője, hogy biztosítja azt, hogy a valószínűségi változók átlaga továbbra is egyenlő lesz a kívánatos átlaggal. Ugyanakkor az eredményül kapott szórás lehet, hogy nem lesz egyenlő az elvárt szórással. Így tehát a modell addig módosítja egyidejűleg a lehetséges kimeneteket a valószínűségi változó átlaga körül, míg el nem éri a kívánatos varianciát. Miután minden lehetséges kimenetet változtat, a módszer megőrzi az eloszlás alakját.

A következő módszer a scenárió kimenetek létrehozására az, amelynél a lehetséges esetek az időperiódustól függenek. Faktoranalízis alkalmazásával a kutatócsoport arra a megállapításra jutott, hogy három faktorról jellemezhető az összefüggés az eszközmegtérülésekre vonatkozóan. Ez a három faktor a kamatrátá, a tőkemegtérülés és a devizaárfolyam. Így tehát kiválasztották a hosszú távú államkötvények hozamát, hogy reprezentálják a kamat faktort, a TOPIX index hozamát, hogy a tőke faktort írja le, illetve a yen/dollár árfolyamot, hogy reprezentálja a devizaárfolyamot.

A modell felhasználja a scenárió alkotás harmadik módszerét is, ahol a felhasználó határozza meg a sztochasztikus tényezők lehetséges kimeneteit a scenárió fa minden elágazásánál.

A program bevezetése

A modell kidolgozása 1989 szeptemberében kezdődött, alkalmazását pedig az 1991-es üzleti évre kívánták időzíteni, melynek kezdő időpontja így 1991. április 1. Az eredeti modell 17 eszköz csoportot, 10 időperiódust, és 2048 scenáriót tartalmazott. A lineáris programozási feladat, amelyet a sztochasztikus programozási feladat ekvivalens átfogalmazásával nyertünk 249 909 sort és 348 401 oszlopot tartalmazott 1 556 456 nullától eltérő tényezővel. Miután a

program túl nagynak tűnt, a modellt 7 eszközcsoportha, 6 szakaszra és 256 scenárióra csökkent.

A program hat modulból épült fel: az első a mátrixot hozta létre, a második a scenáriókat alkotta meg, a harmadik a kötelezettségeket, a negyedik az együttthatókat kezelte, a következő maga a program fő része, majd a hatodik a beszámolót készítette.

A mátrix generátor feladata a feladat keretét alkotó bázis lineáris programozási feladat felépítése. Abban a tekintetben rugalmasnak tekinthető, hogy megengedi a felhasználónak, hogy változtassa a lineáris program jellemzőit, melyek befolyásolják a probléma méretét. Így például a felhasználó választhat az eszközcsoportha és különböző időperiódusokban beengedheti, vagy kizárhatja azokat a lehetséges eszközcsoportha köréből. Változtathatja az egyes eszköz számlák nevét és számát, illetve az egyes befektetési formák nevét és számát, valamint az egyes eszközcsoportha nevét és számát.

A scenárió generátor építi fel az adatstruktúrát, amely a scenárió fát jellemzi, illetve számolja a várható megtérüléseket minden eszközcsoportha vonatkozóan minden scenárió esetében.

A kötelezettségekkel foglalkozó egység a kötelezettség várható cash-flow-ját és egyenlegét határozza meg az előbbi scenárió generátor programból nyert fa struktúra, illetve kamatlábak felhasználásával a fa minden egyes elágazása esetén.

A program „fő alkotórésze” az eddigi programrészek felhasználásával, egy megfelelő optimalizáló algoritmus alkalmazásával (pl. Wets (1988)) keres megoldást a leírt problémára, majd az utolsó részprogram részletesen elemzi a megoldást.

A scenáriók számától függően a program 1-3 óra futásidővel dolgozik.

A program outputjai:

1. Eszközallokáció a kezdeti időszakra.
2. Várható allokáció valamennyi, a modellben szereplő periódusra.
3. Várható Eredménykimutatás minden, a modellben szereplő periódusra.

4. Várható Mérleg valamennyi, a modellben szereplő időintervallumra.
5. A „csódhelyzet” valószínűségeloszlása.

A Russel-Yasuda Kasai modell egyszerűsített változatának bemutatása

Az egyes időpontokat $t = 0, 1, \dots, T$ jelzi. A sztochasztikus program döntési változói a következők:

V_t = teljes piaci érték a t -edik időpontban,

X_{nt} = az n -edik eszköz piaci értéke a t -edik időpontban,

w_{t+1} = a „csódhelyzet” jövedelme a $t+1$ -edik időpontban,

v_{t+1} = többletjövedelem a $t+1$ -edik időpontban.

A sztochasztikus program együtthatóiban megjelenő valószínűségi változók:

RP_{nt+1} = az n -edik eszköz ármegtérülése a t -edik időszak végétől a $t+1$ -edik időszak végéig,

RI_{nt+1} = az n -edik eszközön elért jövedelem a t -edik időszak végétől a $t+1$ -edik időszak végéig.

Az egyenlet jobb oldalán megjelenő valószínűségi változók a következők:

F_{t+1} = a t -edik időszak végétől a $t+1$ -edik időszak végéig megjelenő befizetések

P_{t+1} = kifizetések a t -edik időszak végétől a $t+1$ -edik időszak végéig

I_{t+1} = kifizetett kamat a t -edik időszak végétől a $t+1$ -edik időszak végéig

g_{t+1} = a kötvényekhez kapcsolódó jóváírásoknál alkalmazott kamatrátá a t -edik időszak végétől a $t+1$ -edik időszak végéig

L_t = a kötelezettségek értéke a t -edik időszakban.

A feladat megoldásánál alkalmazott függvény a következő:

$C_t(\cdot)$ = szakaszonként lineáris konvex költségfüggvény

A modell feladata az, hogy az eszközértékelésen keresztül meghatározza az alap értékét, annak érdekében, hogy maximalizálja a várható vagyoneértéket a tervezési időszak végén (T), illetve megakadályozza az időszak során kialakuló esetleges „csődhelyzeteket”.

$$\text{Maximize } E\left(V_t - \sum_{t=1}^T c_t w_t\right)$$

azzal a feltétellel, hogy:

„vagyon értékre” vonatkozó korlát:

$$\sum_n X_{nt} - V_t = 0$$

az eszköznövekményre vonatkozó feltétel:

$$V_{t+1} - \left(\sum_n (1 + RP_{nt+1} + RI_{nt+1}) X_{nt}\right) = F_{t+1} - P_{t+1} - I_{t+1}$$

a „csődhelyzetre” vonatkozó korlát:

$$\sum_n RI_{nt+1} X_{nt} + w_{t+1} - v_{t+1} = g_{t+1} L_t$$

a nemnegativitási korlát:

$$X_{nt} \geq 0, \quad v_{t+1} \geq 0, \quad w_{t+1} \geq 0$$

ahol $t = 0, 1, 2, \dots, T-1$. A kötelezettségek egyenlegét és a cash flow-t úgy határozzuk meg, hogy a kötelezettségekre vonatkozóan igaz legyen az alábbi összefüggés:

$$L_{t+1} = 1 + g_{t+1} L_t + F_{t+1} - P_{t+1} - I_{t+1} \quad t = 0, 1, 2, \dots, T-1$$

Az egyszerűsítések érdekében ez az egyszerűsített leírás nem tartalmazza a modell számos elemét, mint például további csődhelyzeteket, vagy indirekt befektetések (mint a „tokkin” alapok, illetve leányvállalatok), a jogszabályi előírásokat, az adók hatásait, illetve az utolsó időszakra vonatkozó hatásokat.

A modell részletes leírását Carino, D.R. and Fan, Y. 1993. Alternative risk measures for asset allocation (Gestion collective internationale, (2) (July/August), 47-51 tartalmazza.

2. Eszköz-kötelezettség illesztés az életbiztosításban

2.1 Matematikai programozási modell az ALM meghatározására

Pénzintézetek, különösen életbiztosító társaságok befektetési stratégiájukat törekednek úgy megválasztani, hogy a befektetési portfóliójukból származó jövedelmeik minden időszakban lehetővé tegyék a kötelezettségeik zavartalan teljesítését. A kamatrátá változásokból adódó kockázataik csökkentése érdekében „immunizálják” portfóliójukat.

Egy fix jövedelmezőségű *portfólió immunizált*, ha mind jelenértéke, mind hátralévő futamidejének várható értéke (duration) egyenlő a kötelezettségek jelenértékével és hátralévő futamidejének várható értékével.

Modellünkben feltételezzük, hogy ismeretes és rögzített a kötelezettségek jövőbeli pénzárama és értéke. Feladatunknak azt tartjuk, hogy ehhez a pénzáramláshoz legjobban igazodó befektetési portfóliót állítsunk össze olyan elemekből, amelyekből származó pénzáramlás időpontjai és összegei előre ismertek. A modellt matematikai programozási feladat formájában fogalmazzuk meg. A pénzáramlás időbeli eloszlásának mérésére gyakran használatos mutatókra vonatkozóan és a portfólió elemek arányára és értékére írunk elő feltételeket, és e feltételek teljesülése mellett minimalizálni akarjuk a befektetési portfólió konvexitásának a kötelezettségek portfóliójának konvexitásától való eltérését. (A konvexitás és duration fogalmát korábban bevezettük, különböző módosításait bemutatjuk. E fejezetben egy más felfogásban ismét tárgyaljuk mindkét fogalmat a modellben szereplő jelölések ismertetése után.)

Soroljuk fel a modellben szereplő fogalmakat és jelöléseket.

$t_1, t_2, \dots, t_m$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_m$) jelöli a kötelezettségek és a szóba jöhető befektetés fajták jövőbeli pénzáramának időpontjait, $t < t_1$ az értékelési időpont;

$v(t, t_k)$ a diszkont tényező a $[t, t_k]$ időszakra, $k = 1, \dots, m$;

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_h\}$ mátrix: h sorból és m oszlopból áll; i -edik sorának k -edik eleme: b_{ik} azt tartalmazza, hogy az i -dik biztosítási szerződéstípus egy egységéhez tartozóan a k -edik időpontban mekkora összeget kell kifizetni;

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ mátrix: n sorból és m oszlopból áll és i -dik sorának k -edik eleme: a_{ik} azt tartalmazza, hogy az i -dik befektetési portfólió elem (fix kamatozású értékpapír, adott

jövedelmekkel jellemezhető ingatlan, stb) egy egysége mennyi jövedelmet hoz a k -dik időpontban;

$q = \{q_1, q_2, \dots, q_h\}$ h komponensű vektor: i -edik eleme az i . biztosítási szerződéstípus egységárát jelenti a t értékelési időpontban;

$p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ n komponensű vektor: i -edik eleme az i . befektetési portfólió elem egységárát jelenti a t értékelési időpontban;

$y = \{y_1, y_2, \dots, y_h\}$ h komponensű vektor: i -dik eleme az i . biztosítási szerződéstípus mennyiségét képviseli a biztosítási állományban (a kötelezettségek portfóliójában);

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ n komponensű vektor: i -dik eleme az i . befektetési portfólió elem mennyiségét képviseli a teljes befektetési portfólióban;

$x' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ és $x'' = \{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\}$ n komponensű vektorok az egyes befektetési portfólió elemek arányára előírt alsó és felső korlátokat jelentik ;

$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ m komponensű vektor: k -dik eleme a k -dik időpontbeli összes kötelezettség a kötelezettségek portfóliójában: $\beta_k = \sum_{i=1}^h y_i b_{ik}$;

$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ m komponensű vektor: k -dik eleme a k -dik időpontbeli összes jövedelem, ami a befektetési portfólióból származik: $\alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i a_{ik}$;

C_a és C_b a befektetési portfólió illetve a kötelezettségek portfóliójának a teljes ára a t értékelési időpontban: $C_a = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ és $C_b = \sum_{i=1}^h y_i q_i$;

P_a és P_b a befektetési portfólió illetve a kötelezettségek portfóliójának a jelenértéke a t értékelési időpontban: $P_a = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^m a_{ik} v(t, t_k)$ és $P_b = \sum_{i=1}^h y_i \sum_{k=1}^m b_{ik} v(t, t_k)$;

D_a és D_b a befektetési portfólió illetve a kötelezettségek portfóliója hátralévő futamidejének várható értéke (duration) a t értékelési időpontban: $D_a = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{1}_k - t \bar{g}_{ik} \right) v(t, t_k) / P_a$

és $D_b = \sum_{i=1}^h y_i \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{1}_k - t \bar{g}_{ik} \right) v(t, t_k) / P_b$;

$MAD_a(t_j)$ és $MAD_b(t_j)$ a befektetési portfólió illetve a kötelezettségek portfóliója tekintetében a pénzáramok időpontjai eloszlásának átlagos abszolút eltérése az egyes t_j időpontokra nézve, $j = 1, \dots, m$:

$$MAD_a(t_j) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^m |t_j - t_k| a_{ik} v(t, t_k) / P_a \quad \text{és}$$

$$MAD_b(t_j) = \sum_{i=1}^h y_i \sum_{k=1}^m |t_j - t_k| b_{ik} v(t, t_k) / P_b ;$$

M_a és M_b a befektetési portfólió illetve a kötelezettségek portfóliójának konvexitása a t értékelési időpontban:

$$M_a = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^m t_k t_{k+1} a_{ik} v(t, t_k) / P_a \text{ és}$$

$$M_b = \sum_{i=1}^h y_i \sum_{k=1}^m t_k t_{k+1} b_{ik} v(t, t_k) / P_b.$$

A hátralévő futamidő várható értéke (duration). Egy portfólióból származó pénzáramlás $t_1, t_2, \dots, t_m$ időpontjait úgy fogjuk fel, mint a pénzáramlás időpontja, mint valószínűségi változó lehetséges realizációit, amelyek súlyai, azaz a bekövetkezési valószínűségei azt mutatják meg, hogy az egyes időpontokban esedékes jövedelmek jelenértékei milyen arányt képviselnek az egész portfólió jelenértékében. Ekkor a hátralévő futamidő várható értéke e valószínűségi változó várható értéke lesz.

Tekintsük a következő példát:

Portfóliónk két értékpapírt tartalmaz: egy 3 éves lejáratú évente 5% kamatot fizető államkötvényt és egy egyéves lejáratút, amely egy év múlva a névérték 124%-át fizeti. Mindkettő 1 névértékű. Tegyük fel, hogy az azonnali kamatrátát 1 évre 11%, 2 évre 10%, 3 évre 9%. Foglaljuk össze a pénzáramlás időpontjait és adatait (kerekítve):

13. számú táblázat

Idő	Diszkont-faktor	Pénzáramlás				Súlyok
		1. Áktv	2. Áktv	összesen	jelenértéke	
1 év Múlva	0,901	0,05	1,24	1,29	1,1623	0,5720
2 év Múlva	0,826	0,05		0,05	0,0413	0,0205
3 év Múlva	0,772	1,05		1,05	0,8108	0,4025
Összesen:					2,0144	1

A hátralévő futamidő várható értéke = $1 \cdot 0,572 + 2 \cdot 0,0205 + 3 \cdot 0,4025 = 1,8205$.

A hátralévő futamidő varianciáját és egyéb tulajdonságait pontosan úgy számoljuk, ahogy a valószínűségi változók esetében.

Konvexitás. *A portfólióból származó pénzáramlás $t_1, t_2, \dots, t_m$ időpontjaiból számított t_j^2 értékeknek a jelenérték arányokkal súlyozott összege: várható értéke. A példabeli portfólió konvexitása = $1 \cdot 0,572 + 4 \cdot 0,0205 + 9 \cdot 0,4025 = 4,2765$.*

A konvexitás arra használható, hogy javítsuk egy befektetési portfólió és egy kötelezettség portfólió illeszkedését: immunizációját. Nemcsak a két portfólió jelenértékének és hátralévő futamidejének várható értékének egyenlőségére törekszünk, hanem azt várjuk, hogy a befektetési portfóliónk konvexitása meghaladja a kötelezettségek konvexitását.

Megjegyezzük, hogy a hátralévő futamidő várható értéke és konvexitás a korábban bevezetett átlagos futamidő és konvexitás fogalmakkal azonos folytonos kamatfizetést feltételezve.

E fogalmakról az olvasó bővebben tájékozódhat pl. D.G. Luenberger : Investment Science, Oxford University Press, Oxford (1998) könyvében.

Modellünkben feltételezzük, hogy a kötelezettségek teljes körűen ismertek. Adottak:

a kötelezettségek és a szóba jöhető befektetések pénzáramlásának időpontjai: $t_1, t_2, \dots, t_m$,

ahol $(t_1 < t_2 < \dots < t_m)$;

a $v(t, t_k)$ diszkont tényezők minden $[t, t_k]$ időszakra, $k = 1, \dots, m$;

az egyes biztosítási szerződéstípusok egy egységéhez kapcsolódó kifizetési kötelezettségeket illetve az egyes szóba jövő befektetési portfólió elemek egy egységéből származó jövedelmeket az egyes időpontokban összefoglaló B és A mátrixok;

a q és p árvektorok,

az y vektor;

az x' és x'' vektorok.

Ezekből számítani tudjuk a β vektor elemeit és a $C_b, P_b, D_b, MAD_b(t_j), M_b$ értékeket.

Modellünkben a befektetési portfóliót akarjuk meghatározni, vagyis azt, hogy a szóba jöhető befektetési lehetőségek a portfólióban hány egységgel szerepeljenek. A modell változói tehát az $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ n komponensű vektor elemei.

A kötelezettségek portfóliója és a befektetési portfólió kellő illesztése érdekében előírjuk, hogy:

1. a befektetési portfólióból származó jövedelmek jelenértéke legyen egyenlő a kötelezettségek jelenértékével;
2. a két portfólió hátralévő futamidejének várható értéke megegyezzen;
3. a pénzáramok időpontjai eloszlásának átlagos abszolút eltérése a befektetési portfólióra legyen legalább akkora, mint a kötelezettségek portfóliójára minden időpontra;
4. a befektetési portfólió ára ne legyen nagyobb, mint a kötelezettségek portfóliójának ára;
5. az egyes befektetési portfólió elemek arányai az előírt alsó és felső korlátok között legyenek.

E feltételek mellett minimalizáljuk a befektetési portfólió konvexitásának a kötelezettség portfólió konvexitásától való eltérését.

Írjuk fel a modellt, amely további átalakítással lineáris programozási modellé tehető:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^m t_k t_{k+1} a_{ik} v(t, t_k) / P_a - M_b \right| \rightarrow \min$$

- (1) $\sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^m a_{ik} v(t, t_k) = P_b$
- (2) $\sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^m \left(\frac{t_k}{t} - t_k \right) a_{ik} v(t, t_k) / P_a = D_b$
- (3) $\sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^m |t_j - t_k| a_{ik} v(t, t_k) / P_a \geq MAD_b(t_j), \quad j = 1, \dots, k$
- (4) $\sum_{i=1}^n x_i p_i \leq C_b$
- (5) $x_i' \sum_{j=1}^n x_j p_j \leq x_i p_i \leq x_i'' \sum_{j=1}^n x_j p_j, \quad i = 1, \dots, n.$

Nézzünk egy (nem realiztikus) példát.

Kötelezettségünk egyetlen, két év múlva esedékes 100 darab egységnyi értékű kifizetésből áll, e kötelezettségvállalás ára 100 (valamilyen pénzegységben).

Három befektetési lehetőségünk van:

- az egyik egy 3 éves lejáratú évente 5% kamatot fizető államkötvény, az egységnyi névértékű papír ára 0,80;
- egy egyéves lejáratú, amely egy év múlva a névérték 124%-át fizeti, az egységnyi névértékű papír ára 1,20;
- egy kétéves lejáratú, amely két év múlva a névérték 90%-át fizeti, az egységnyi névértékű papír ára 0,80.

Tegyük fel, hogy az azonnali éves kamatrátá 1 évre 11%, 2 évre 10%, 3 évre 9%.

A kérdés az, hogy mennyit tartalmazzon a befektetési portfóliónk e három értékpapírból, ha ehhez a kötelezettséghez legjobban illeszkedő portfóliót szeretnénk összeállítani és előírjuk, hogy a portfólió jelenlegi piaci ára ne legyen több, mint 90.

Modellünk változói: x_1, x_2 , illetve x_3 azt jelentik, hogy a portfólió a három értékpapírból hány egységet tartalmazzon. Határozzuk meg a modellben szereplő együtthatókat.

A kötelezettségek és a szóba jöhető befektetések pénzáramlásának időpontjai: $(t_1, t_2, t_3) = (1, 2, 3)$; 0 a jelenlegi: az értékelési időpont;

A $v(t, t_k)$ diszkont tényezők: $(0,901; 0,826; 0,772)$;

Az B mátrix egyetlen sorból áll: $(0; 1; 0)$.

Az A mátrix a három értékpapírnak megfelelően három sorból áll:

$$A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,05 & 1,05 \\ 1,24 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix}$$

A befektetési portfólió elemek $a_{ik} v(t, t_k)$ jelenértékeinek mátrixa és sorösszezei:

$$\begin{pmatrix} 0,04505 & 0,0413 & 0,8106 \\ 1,11724 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7434 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,89695 \\ 1,11724 \\ 0,7434 \end{pmatrix}.$$

A $t_k a_{ik} v(t, t_k)$ értékek mátrixa és sorösszezei:

$$\begin{pmatrix} 0,04505 & 0,0826 & 2,4318 \\ 1,11724 & 0 & 0 \\ 0 & 1,4868 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,55945 \\ 1,11724 \\ 2,9736 \end{pmatrix}.$$

A kötelezettség jelenértéke: $P_b = 100 * 0,826 = 82,6$;

Az y vektor egyetlen elemet tartalmaz: $y = 100$;

A q és p árvektorok: $q = 1$, $p = (0,80; 1,20; 0,80)$, $C_b = 100$;

A 2. évben esedékes 100 értékű kötelezettség hátralévő futamidejének várható értéke maga a futamidő: $D_b = 2$;

A 2. évben esedékes 100 értékű kötelezettség konvexitása: $M_b = 2 * 3 = 6$.

Mint hogy az egyes értékpapírok részesedésére nem írtunk elő korlátokat, ezért az $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektorra csak a nemnegativitási feltételnek kell teljesülnie.

Kiszámoljuk a $MAD_b(t_j)$ értékeket:

14. számú táblázat

Idő	Diszkont Faktor	Pénz- áramlás	Pénzáramlás jelenértéke	$ t_1 - t_k $ értékek	$ t_2 - t_k $ értékek	$ t_3 - t_k $ értékek
1 év múlva	0,901	0	0	0	1	2
2 év múlva	0,826	100	82,6	1	0	1
3 év múlva	0,772	0	0	2	1	0
				$MAD_b(t_1) = 82,6$	$MAD_b(t_2) = 0$	$MAD_b(t_3) = 82,6$

A $MAD_a(t_j)$ felírásához az együtthatókat adott j indexre úgy kapjuk meg, hogy a megfelelő $|t_j - t_k|$ oszlopban lévő értékekkel megszorozzuk az $a_{ik} v(t, t_k)$ értékek mátrixának a sorait és a szorzatokat összeadjuk:

$$\begin{aligned} j = 1\text{-re:} \quad & 0,04505 * 0 + 0,0413 * 1 + 0,8106 * 2 = 1,6625 \\ & 1,11724 * 0 = 0 \\ & 0,7434 * 1 = 0,7434; \end{aligned}$$

$$j = 2\text{-re: } 0,04505 \cdot 1 + 0,0413 \cdot 0 + 0,8106 \cdot 1 = 0,85565$$

$$1,11724 \cdot 1 = 1,11724$$

$$0,413 \cdot 0 = 0;$$

$$j = 3\text{-ra: } 0,04505 \cdot 2 + 0,0413 \cdot 1 + 0,8106 \cdot 0 = 0,1314$$

$$1,11724 \cdot 2 = 2,23448$$

$$0,7434 \cdot 1 = 0,7434.$$

Végül az M_a megfogalmazásához szükségünk van a $t_k t_{k+1} a_{ik} v(t, t_k)$ értékek mátrixára és sorösszegeire.

$$\text{Ezek: } \begin{pmatrix} 0,0901 & 0,2478 & 9,7272 \\ 2,23448 & 0 & 0 \\ 0 & 4,4604 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10,0651 \\ 2,23448 \\ 4,4604 \end{pmatrix}.$$

Rendelkezésünkre állnak a modell felírásához szükséges együtthatók. (Számítógéppel) megoldandó feladatunk ezután a következő lesz:

$$\begin{array}{llllll} | (10,0651x_1 & + 2,23448x_2 & + 4,4604x_3) / 82,6 - 6 | & \rightarrow & \min \\ (1) & 0,89695x_1 & + 1,11724x_2 & + 0,7434x_3 & = & 82,6 \\ (2) & 2,55945x_1 & + 1,11724x_2 & + 1,4868x_3 & = & 2 \cdot 82,6 = 165,2 \\ (3) & 1,6625x_1 & & + 0,7434x_3 & \geq & 82,6 \\ & 0,85565x_1 & + 1,11724x_2 & & \geq & 0 \\ & 0,1314x_1 & + 2,23448x_2 & + 0,7434x_3 & \geq & 82,6 \\ (4) & 0,80x_1 & + 1,20x_2 & + 0,80x_3 & \leq & 90 \\ (5) & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

A feladatot a következőkben ismertetett Excel program segítségével oldottuk meg közelítőleg. Az optimális megoldásban: $x_1 = 25,67$; $x_2 = 17,60$; $x_3 = 53,72$. A program lineáris programozási solvert alkalmaz, a tört értékek ennek köszönhetők. Nem okozunk azonban nagy bajt, ha kerekítünk, és azt ajánljuk, hogy az első értékpapírból 26, a másodikból 18, a harmadikból 54 darabot (egységnyit) vásároljunk – és ezzel a feltételezett kamatlábak kis változásaival szemben megvédjük magunkat. Ekkor a befektetési portfóliónk konvexitása 6,5, magasabb, mint a kötelezettségünk portfóliója, vagyis csekély haszonnal is kecsegtet. Bár a befektetési portfóliónk ára az előírt 90 értéket a kerekítés miatt meghaladja: 91, a várható haszon a különbséget kiegyenlítheti.

Éppen azért, mert ha a befektetési portfólió konvexitása nagyobb a kötelezettség portfóliónk konvexitásánál, akkor a különbség a feltételezett kamatlábak kis változása esetén némi haszonra utal, megoldottuk a feladatot egy másik célfüggvényre is: a befektetési portfóliónk konvexitását maximalizáltuk változatlan feltételek mellett. Optimális megoldásul a következőt kaptuk: $x_1 = 49,7$; $x_2 = 34,7$; $x_3 = 0$. Kerekítve ezeket az értékeket azt kapjuk, hogy az első értékpapírból 50, a másodikból 34 darabot célszerű vásárolni. E portfólió ára nem éri el a megszabott határt: 80,8. Ekkor a befektetési portfóliónk konvexitása megközelítőleg 7.

A modell felírásában De Felice, M: Immunization Theory: An Actuarial Perspective on Asset-Liability Management, in: Financial Risk in Insurance, (ed: Ottaviani, G), Springer, 1995, (pp 63-85) című munkája inspirált bennünket.

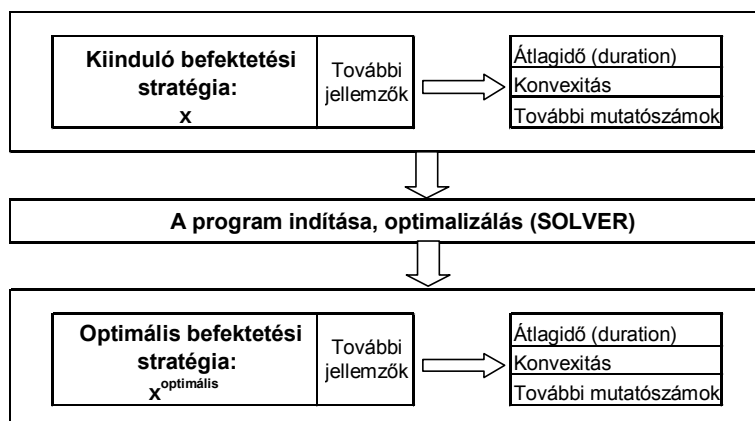
Megjegyezzük, hogy az alkalmazott fogalmak és összefüggések birtokában e modell többféle irányban továbbfejlesztő.

2.2 Az Excel-modell bemutatása

A tanulmány előző részében bemutattuk azt a modellt, amelyet (a számos lehetséges modell közül) kiválasztottunk a magyar életbiztosítók ALM (eszköz-kötelezettség illesztési) döntéseinek elemzésére. A tanulmány részeként a bemutatott modell szerkezetén alapuló Excel-modellt is készítettünk, amellyel az ALM szempontjából optimális befektetési döntések meghatározásának menete is szemléltethető. A bemutatott Excel-modellt néhány feltételezett kiinduló adattal feltöltve mutatjuk be; ezen adatok meghatározásakor a feltételezések során a tanulmány készítésének idején a magyar biztosítási és pénzügyi szektorra jellemző tulajdonságokat is figyelembe vettünk. Az elkészített Excel-modellben található input-adatok az Excel-modell alkalmazása során módosíthatóak, így a tanulmányban bemutatottakon túl az Excel-modell alapján további elemzések is készíthetők. A tanulmány ezen részében a továbbiakban az Excel-modell működésének menetét, a minta input-adatokkal kapott futtatás eredményeit, valamint a további felhasználásra vonatkozó javaslatainkat mutatjuk be.

A modell működésének menetét a következő ábra szemlélteti:

13. számú ábra



Az Excel-modell a felhasználó által megadott input adatokból indul ki, amelyek között a kiinduló befektetési stratégia leírása is szerepel. A kezdetben megadott paraméterek alapján kiszámíthatóak a modellben szereplő biztosító helyzetét jellemző különböző pénzügyi mutatószámok (például az átlagidő, illetve a konvexitás értéke). A kezdetben megadott input adatok (meghatározott korlátozások figyelembevételével) tetszőlegesek lehetnek, így a

kiinduló helyzetben a befektetési stratégiát nem feltétlenül tekinthetjük optimálisnak. Az Excel-modellben a kiinduló helyzetben megadott befektetési stratégia optimálistól való eltérését például a különböző modellbeli feltevések nem teljesülése is szemléltetheti (például ha az Excel-modell kiinduló adatokkal való feltöltése után az eszközök és a kötelezettségek átlagideje nem egyezik meg). Az optimális befektetési stratégiát az Excel-modell esetében a SOLVER alkalmazásával határozzuk meg. A SOLVER által meghatározott befektetési stratégia optimalitását az Excel-modellben a modellbeli feltevések teljesülése is mutatja (így például az optimális befektetési stratégia esetében az eszközök és a kötelezettségek átlagideje megegyezik).

Az Excel-modell működésének menetét a következőképpen foglalhatjuk össze:

- A modell felhasználója először megadja a modell működéséhez szükséges input adatokat (az „*A*” lap, az „*L*” lap, valamint a „*Modell*” lap kijelölt részein). A modell működéséhez szükséges input adatok elhelyezkedését az Excel-modell egyértelműen, az alkalmazást segítő módon jelöli.
- A megadott input adatok alapján az Excel-modellben a paraméterek aktuális beállításai mellett az eszközökre és a kötelezettségekre vonatkozóan kiszámításra kerülnek a modell működéséhez szükséges mutatószámok értékei (például az eszközök és a kötelezettségek átlagideje).
- A modell felhasználója a „*Modell*” lapon elindítja a SOLVER-t, amelynek segítségével kiszámítható⁴⁰ a megadott input adatok és a modellben alkalmazott feltevérendszer melletti optimális befektetési portfólió összetétele.

Az Excel-modellben az input adatok a következő részletezettséggel tölthetők fel:

- Az eszközök között összesen 15 befektetési lehetőség adatai szerepelhetnek.
- A biztosítási kötelezettségek között összesen 10 biztosítási kötelezettség adatai adhatók meg.

⁴⁰ Amennyiben az input adatok és a modellben alkalmazott feltevérendszer mellett található optimális megoldás.

- Az Excel-modell éves modellt tartalmaz, amelyben 20 évre előre lehet adatokat megadni.

Az Excel-modellben szereplő input adatok bemutatását és az Excel-modellben való elhelyezkedését a következő táblázat foglalja össze (a táblázatban szereplő jelölések a tanulmány előző részében bemutatott modell jelöléseire utalnak):

15. számú táblázat

Az input adatok		
Jelölése	tartalma	megadásának helye
A mátrix	befektetések pénzáramlásai	"A" lap
B mátrix	kötelezettségek várható pénzáramlásai	"L" lap
p vektor	befektetések ára	"Modell" lap
q vektor	kötelezettségekből származó nettó díjbevétel	"Modell" lap
y vektor	kötelezettségek "mennyisége"	"Modell" lap
x vektor	befektetések "mennyisége"	"Modell" lap
x' vektor	befektetési korlátozások (alsó korlát)	"Modell" lap
x'' vektor	befektetési korlátozások (felső korlát)	"Modell" lap
$v(t, t_k)$ vektor	Diszkontfaktorok	"Modell" lap

Az Excel-modellben a befektetési stratégiát az x vektor mutatja, amelyben az optimális értékeket a SOLVER alkalmazásával állíthatjuk elő. A következőkben az egyes input adatok pontos értelmezését, illetve az elkészített Excel-modellben szereplő minta input-adatokat mutatjuk be.

Az A mátrix

Az Excel-modellben az A mátrix a befektetési lehetőségek egy egységére jutó pénzáramlásokat mutatja meg. A befektetési lehetőségek között az elkészített Excel-modellben állampapírok szerepelnek, a befektetési lehetőségek egy egységének az 1 forintnyi

névértéket tekintjük. Az elkészített Excel-modellben az állampapírok szerepeltetése a gyakorlati tapasztalatokkal támasztható alá (a gyakorlatban az életbiztosító társaságok befektetéseinek nagy részét állampapírok teszik ki). A modell alapját képező feltevérendszer elsősorban a kamatlábckockázat kezelésére vonatkozik; a modellben a további befektetési lehetőségek (például részvények) szerepeltetésére tehát ezzel a korlátozással van lehetőség. Az elkészített Excel-modellben a minta input-adatok forrásául az Államadósság Kezelő Központ (ÁKK) által közzétett adatok szolgáltak. Az ÁKK honlapjáról 2004. november 24-én letöltött adatbázisból kiválasztottunk 15 fix kamatozású államkötvényt, amelyeknél a lejáratig hátralévő futamidőt évekre kerekítettük⁴¹. Az Excel-modellben a minta input adatok megadásánál ezen évekre kerekített hátralévő futamidő és a kamatszervény értékét használtuk fel. Az Excel-modellben szereplő magyar államkötvények a következők:

16. számú táblázat

Eszköz sorszám	Értékpapír	ISIN Kód	Lejárat	Kamatszervény	Hátralévő futamidő (év) kerekítve
1	A060512E01	HU0000401963	12.05.2006	8,5000	1
2	A060824G03	HU0000402201	24.08.2006	6,5000	2
3	A070412F04	HU0000402227	12.04.2007	9,0000	2
4	A070612D02	HU0000402052	12.06.2007	6,2500	3
5	A071012G04	HU0000402250	12.10.2007	9,2500	3
6	A080612C03	HU0000402102	12.06.2008	6,2500	4
7	A090212B99	HU0000402177	12.02.2009	9,5000	4
8	A090624C03	HU0000402219	24.06.2009	7,0000	5
9	A091012D04	HU0000402243	12.10.2009	8,2500	5
10	A110212A00	HU0000401922	12.02.2011	7,5000	6
11	A130212D02	HU0000402045	12.02.2013	6,7500	8
12	A140212C03	HU0000402193	12.02.2014	5,5000	9
13	A150212A04	HU0000402268	12.02.2015	8,0000	10
14	A171124A01	HU0000402037	24.11.2017	6,7500	13
15	A201112A04	HU0000402235	12.11.2020	7,5000	16

⁴¹ Az Excel-modell technikailag kibővíthető olyan módon, hogy az eszközök és a kötelezettségek lejárat idejénél az évekre kerekített tartamok helyett tényleges lejárat időpontok (dátumok) is figyelembe vehetők.

A B mátrix

Az Excel-modellben a *B mátrix* a biztosítási kötelezettségek egy egységére jutó várható pénzáramlások értékeit foglalja össze. Az Excel-modellben a biztosítási kötelezettségek egy egységének az 1 forintnyi biztosítási összeget tekintjük. Az Excel-modellben a következő biztosítási kötelezettségeket modellezzük:

17. számú táblázat

Kötelezettség sorszám	Biztosítási kötelezettség leírása
1	5 éves elérési életbiztosítás
2	5 éves kockázati életbiztosítás
3	10 éves elérési életbiztosítás
4	10 éves kockázati életbiztosítás
5	20 éves elérési életbiztosítás
6	20 éves kockázati életbiztosítás

A szakirodalom a biztosítások nettó díjának meghatározásakor 1 forintnyi biztosítási összeg esetében például a kockázati életbiztosítások egyszeri nettó díjánál a következő képletet alkalmazza (például *Banyár*[2003] 186. oldal):

$$A_{x:n}^1 = \frac{d_x}{l_x} \cdot v^1 + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \dots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n$$

ahol:

x : a biztosított életkora a biztosítási szerződésbe való belépéskor

n : a biztosítás tartama

$A_{x:n}^1$: a kockázati életbiztosítás egyszeri nettó díja

d_x : az x évesen elhunytak száma (egy adott halandósági táblát feltételezve)

l_x : az x évesen életben lévők száma (egy adott halandósági táblát feltételezve)

v : valamely i technikai kamatláb alapján számított, a diszkontálásnál felhasznált tényező:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Ezen jelölések alapján annak a valószínűsége, hogy egy x éves biztosított x évesen halálozik

el: $\frac{d_x}{l_x}$, míg például annak a valószínűsége, hogy egy x éves biztosított $x+1$ évesen is életben

van: $\frac{l_{x+1}}{l_x}$.

A nettó díjszámítás során az életbiztosításoknál tehát a biztosítási kötelezettségek várható értékének jelenértékét számítják ki (valamely technikai kamat feltételezése mellett). Ezek alapján az Excel-modellben a *B mátrix* minta input-adatainak feltöltése során az egyes biztosítási kötelezettségekhez kapcsolódó valószínűségeket (kockázati életbiztosítások esetében a halandósági, elérési életbiztosítások esetében pedig az életben maradási valószínűségeket) vesszük figyelembe. A gyakorlatban ezek a valószínűségek a különböző életkorú és nemű biztosítottak esetében eltérőek lehetnének. Az Excel-modellben ezért a minta-input adatok meghatározása során feltételezzük, hogy a biztosító állománya 37 éves biztosítottakból áll, és a halandósági illetve az életbenmaradási adatokat vegyes halandósági tábla alapján számítjuk ki. (Az Excel-modellben 1998-as halandósági táblákkal dolgozunk.) Az adatok alapján például annak a valószínűségei, hogy egy 37 éves („átlagos”⁴²) biztosított megéri a szerződéskötéstől számított 1., 2., ..., illetve 5. év végét:

18. számú táblázat

<i>Eltelt évek száma:</i>	0	1	2	3	4	5
<i>P(él)</i>	1,00000	0,99693	0,99340	0,98941	0,98496	0,98008

⁴² Vagyis egy olyan biztosított, akinek esetében a halandósági valószínűségeket a vegyes halandósági tábla alapján lehet kalkulálni.

A fenti táblázatban szereplő adatokból az 5. évnél szereplő 98,008% (ez annak a valószínűsége, hogy a 37 éves biztosított 5 év múlva is életben van) került be a *B mátrix* első sorába (az ötödik oszlopba).

A *p* vektor

Ebben a vektorban az egyes befektetési lehetőségek (állampapírok) egy egységének (azaz 1 forintnyi névértékének) modellben feltételezett árai szerepelnek. A gyakorlatban az állampapírok esetében általában a piaci érték is rendelkezésre áll, a modellben azonban a *p* vektor elemeit becslés útján határoztuk meg (mivel az állampapírok lejáratig hátralévő idejét a modell vizsgálati keretébe való beillesztés érdekében évekre kerekítettük). A piaci érték becslésénél az ÁKK honlapjáról (www.akk.hu) letöltött zérókupon hozamgörbét alkalmaztuk (a letöltött zérókupon hozamgörbe számításának ideje: 2004. november 18.). Az egyes modellben szereplő állampapírok 1 forintnyi névértékre jutó árát ilyen módon a következőképpen határoztuk meg (forintban):

19. számú táblázat

<i>Eszköz sorszám</i>	<i>Becsült ár</i>
1	0,9907
2	0,9545
3	0,9984
4	0,9346
5	1,0105
6	0,9227
7	1,0284
8	0,9439
9	0,9929
10	0,9666
11	0,9370
12	0,8643
13	1,0313
14	0,9601
15	1,0164

A *q* vektor

A biztosítási kötelezettségek esetében a *q* vektor tartalmazza azt, hogy az adott biztosítási kötelezettség 1 egységére (1 forintnyi biztosítási összegre) vonatkozóan mekkora egyszeri nettó díjat tudna beszédni a biztosító, amennyiben az előzőekben bemutatott 1998-as adatokat

tartalmazó vegyes halandósági táblát, valamint 3 százalékos technikai kamatot feltételezne. A q vektor esetében megadott minta input-adatok az Excel-modellben tehát a következők:

20. számú táblázat

Kötelezettség sorszáma	A q vektor elemei: nettó díjak
1	0,84543
2	0,01812
3	0,70643
4	0,04228
5	0,47042
6	0,10474

Az y vektor

Ez a vektor a modellben azt mutatja meg, hogy az egyes biztosítási kötelezettségekből összesen hány forintnyi biztosítási összeg van a biztosító állományában. A modellben feltételeztük, hogy a biztosítónak összesen 1.000.000.000 forintnyi biztosítási összeg van az állományában, amelynek 40 százaléka 5 éves tartamú, 20 százaléka 10 éves tartamú, további 40 százaléka pedig 20 éves tartamú biztosítási szerződésekhez kötődik úgy, hogy egy adott biztosítási tartam esetében az elérési és a kockázati életbiztosítások ugyanakkora biztosítási összeggel rendelkeznek. Ilyen módon a minta input-adatok feltöltése során azt feltételeztük, hogy a különböző biztosítási kötelezettségekben található biztosítási összegek nagysága (forintban) a következő:

21. számú táblázat

Kötelezettség sorszáma	Az y vektor elemei
1	200 000 000
2	200 000 000
3	100 000 000
4	100 000 000
5	200 000 000
6	200 000 000

Ezek az input adatok a modell futtatása során tetszőlegesen változtathatók.

Az x vektor

Ez a vektor azt mutatja meg, hogy az egyes befektetési lehetőségekből (állampapírokból) hány forintnyi névértékűt vásárol a biztosító. A modell futtatása előtt ezt a vektort tetszőlegesen feltölthetjük input adatokkal, a modellben az optimalizálás eredménye ezen vektor elemeinek, azaz az optimális befektetési stratégiának a meghatározása lesz. A tanulmányhoz mellékelt Excel-modellben már a minta input-adatok melletti optimalizálás utáni helyzetet mutatjuk be.

Az x' és x'' vektorok:

Az Excel-modellben minden egyes befektetési lehetőség esetében meg lehet adni, hogy az adott befektetési lehetőség értéke a teljes befektetési portfólió értékén belül mekkora arányt képviselhet (a modellben minimum és maximum korlát megadására is lehetőség van). Az x' vektor elemei az alsó befektetési korlátok, az x'' vektor elemei a felső befektetési korlátok megadására szolgálnak. (Például ha az x' vektor első eleme 0.2, míg az x'' vektor első eleme 0.8 lenne, akkor ez azt jelentené, hogy az első befektetési lehetőségbe való befektetés aránya a befektetési portfólió értékén belül 20 százalék és 80 százalék között lehetne – ezek a korlátok ebben a példában természetesen mindössze illusztrációul szolgálnak.) Mivel a jelenlegi magyarországi szabályozás alapján az állampapírokba való befektetésre nem vonatkoznak felső befektetési korlátok, az egyes befektetési lehetőségekre egyenként pedig szintén nem vonatkoznak alsó befektetési korlátok, így az Excel-modell minta input-adatainak feltöltése során az x' vektor elemeit egységesen zérusnak, az x'' vektor elemeit pedig egységesen 1-nek definiáljuk (a modellben tehát a jelenlegi magyarországi szabályozásnál szigorúbb – az egyes befektetési lehetőségekre egyenként megadható – befektetési korlátok figyelembevételére van lehetőség). Az Excel-modell ezen beállításai azt (is) jelentik, hogy elméletileg előfordulhat, hogy az optimális befektetési portfólióban mindössze egyetlen értékpapír szerepel, ugyanakkor elméletileg előfordulhat az is, hogy bizonyos befektetési lehetőségek egyáltalán nem szerepelnek az optimális befektetési portfólióban.

A $v(t, t_k)$ vektor

Ezeket a diszkontfaktorokat az Excel-modell minta input-adatokkal való feltöltése során az ÁKK által meghatározott zérókupon hozamgörbe alapján határoztuk meg (az ÁKK honlapjáról⁴³ letöltött zérókupon hozamgörbe számításának ideje: 2004. november 18.). A zérókupon hozamgörbe adataiból kiválasztottuk azokat, amelyek az Excel-modellben alkalmazott időpontokhoz (1, 2, ..., 20 év) közel állnak, és az Excel-modellben ezeket az adatokat alkalmaztuk. Az Excel-modellben például az első 3 évre vonatkozóan kiszámított diszkontfaktorok értéke a következőképpen alakult:

22. számú táblázat

t (évek)	1	2	3
zérókupon hozamgörbe	9,51%	9,07%	8,80%
DF: $v(t, t_k)$ vektor	0,9131	0,8405	0,7764

A modell eredményeinek előállítás

A modell eredményeit (az optimális befektetési portfólió összetételét) a „*Modell*” lapról indítható SOLVER segítségével állítjuk elő. (A SOLVER az Excel-ben az „*Eszközök*” menüponton belül található, és a tanulmányhoz készített Excel-modellben már tartalmazza a modell feltételrendszerét.) A minta input-adatokkal feltöltött Excel-modellben a következő programozási feladatot oldjuk meg:

$$z_1 + z_2 \rightarrow \min_{x, z}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot \sum_{k=1}^{20} t_k \cdot t_{k+1} \cdot v(t_k) \cdot a_{ik}}{\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot \sum_{k=1}^{20} v(t_k) \cdot a_{ik}} + z_1 - z_2 = \frac{\sum_{j=1}^{10} y_j \cdot \sum_{k=1}^{20} t_k \cdot t_{k+1} \cdot v(t_k) \cdot b_{jk}}{\sum_{j=1}^{10} y_j \cdot \sum_{k=1}^{20} v(t_k) \cdot b_{jk}}$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot \sum_{k=1}^{20} v(t_k) \cdot a_{ik} = \sum_{j=1}^{10} y_j \cdot \sum_{k=1}^{20} v(t_k) \cdot b_{jk}$$

⁴³ www.akk.hu

$$\frac{\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot \sum_{k=1}^{20} t_k \cdot v_k \cdot a_{ik}}{\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot \sum_{k=1}^{20} v_k \cdot t_k \cdot a_{ik}} = \frac{\sum_{j=1}^{10} y_j \cdot \sum_{k=1}^{20} t_k \cdot v_k \cdot b_{jk}}{\sum_{j=1}^{10} y_j \cdot \sum_{k=1}^{20} v_k \cdot t_k \cdot b_{jk}}$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot p_i \leq \sum_{j=1}^{10} y_j \cdot q_j$$

$$x_i' \cdot \sum_{i=1}^{15} x_i \cdot p_i \leq x_i \cdot p_i \leq x_i'' \cdot \sum_{i=1}^{15} x_i \cdot p_i \quad (i=1, \dots, 15)$$

$$z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, 15)$$

Ebben a feladatban $\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot \sum_{k=1}^{20} v_k \cdot t_k \cdot a_{ik}$ a biztosító eszközeinek jelenértékét,

$\sum_{j=1}^{10} y_j \cdot \sum_{k=1}^{20} v_k \cdot t_k \cdot b_{jk}$ pedig a biztosító kötelezettségeinek jelenértékét mutatja. A

programozási feladat leírásában alkalmazott jelölések figyelembe veszik, hogy az Excel-modellben 15 befektetési eszköz és 10 biztosítási kötelezettség adatainak figyelembevételére van lehetőség, valamint hogy az Excel-modellben 20 évre előre lehet adatokat megadni.

A tanulmányhoz mellékelt Excel-modellben (az áttekinthetőbb modellszerkezet kialakítása érdekében) nem szerepelnek a tanulmány elméleti részében bemutatott MAD-korlátok; a modell ezekkel való bővítése azonban technikailag nem okoz problémát. Az Excel-modell szerkezete ezen eltéréstől eltekintve megfelel a tanulmány elméleti részében bemutatott modellnek; a fenti képletekben található jelölések is a tanulmány elméleti részében leírtakhoz igazodnak. Az Excel-modellben alkalmazott célfüggvény matematikailag szintén azonos a tanulmány elméleti részében bemutatott modell célfüggvényével.

Az Excel-modell alkalmazásakor az optimalizálás során előfordulhat, hogy a felhasználó által megadott paraméterek (input adatok) mellett az Excel-modellben nem található optimális megoldás (optimális befektetési stratégia). Ebben az esetben előfordulhat, hogy a feladat lehetséges megoldásainak halmaza üres, vagyis a programozási feladat elméletileg sem oldható meg. Ebben az esetben érdemes lehet a felhasználó által megadott paraméterek módosításával próbálkozni. (Erre a problémára példa lehet az, amikor például a felhasználó a

biztosítási kötelezettségek között mindössze egyetlen 20 éves kötelezettséget tüntet fel, míg az eszközök között például csak 10 éves vagy annál rövidebb futamidejű értékpapírok szerepelnek. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben az eszközök és kötelezettségek átlagideje (duration) semmilyen befektetési stratégia esetében nem egyezhet meg, tehát a feladat lehetséges megoldásainak halmaza üres: a programozási feladatot nem lehet megoldani).

A modell eredményei

Az Excel-modellben az optimális befektetési portfólió összetételét a **„Modell” lap** (is) tartalmazza. Az eredmények áttekinthetőbbé tétele érdekében az Excel-modell főbb mutatószámait, illetve az optimális befektetési portfólió összetételét az **„Eredmények” lap** foglalja össze. Az Excel-modell előzőekben bemutatott input adatai mellett például az optimális befektetési portfólió összetétele:

23. számú táblázat

Az optimális befektetési portfólió összetétele:

<i>Eszköz sorsszám</i>	<i>ennyi forintnyi névértékű értékpapírt kell vásárolnia a biztosítónak</i>
1	0
2	31 570 993
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	3 784 712
13	0
14	12 700 253
15	191 977 053

Ezen optimális befektetési portfólió esetében az Excel-modellben szereplő biztosító főbb pénzügyi mutatószámai a következők:

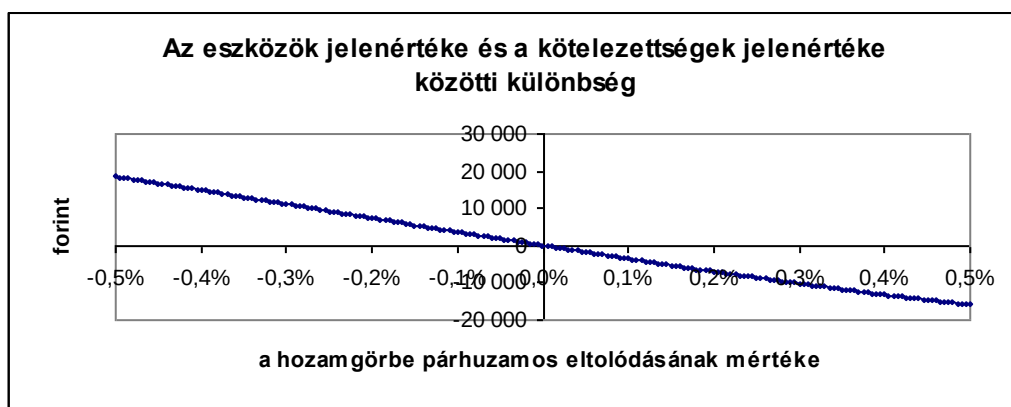
24. számú táblázat

Fontosabb mutatószámok alakulása:

	<i>Eszközök</i>	<i>Kötelezettségek</i>
Jelenértéke (Ft):	240 722 989	240 722 989
Átlagideje (duration):	8,95	8,95

Ebben a helyzetben (ezen optimális befektetési portfólió választása esetén) megvizsgálhatjuk, hogy a hozamgörbe valamely (kis mértékű) vízszintes eltolódása esetében hogyan alakul azon érték, amelyet a biztosító eszközei és kötelezettségei jelenértékének különbözeteként állítunk elő (tehát megvizsgáljuk, hogy hogyan alakul a $PV(\text{eszközök}) - PV(\text{kötelezettségek})$ ⁴⁴ különbözet értéke). Amennyiben például ez az érték pozitív, akkor arra következtethetünk, hogy a hozamgörbe kis mértékű vízszintes eltolódása esetében a biztosító eszközeinek jelenértéke a kötelezettségek jelenértéke fölé emelkedik. Az Excel-modell minta input-adatainak alapján számított optimális befektetési portfólió esetében ezen különbözet értéke a következőképpen alakul:

14. számú ábra



⁴⁴ Itt a PV jelölés a jelenértékre utal.

Az Excel-modell felépítése

Az Excel-modellben a következő lapok találhatók:

- **„Útmutató” lap:** rövid útmutatót tartalmaz a modell alkalmazásáról
- **„A” lap:** a biztosító eszközeivel kapcsolatos fontosabb adatokat és mutatószámokat tartalmazza
- **„L” lap:** a biztosító kötelezettségeivel kapcsolatos fontosabb adatokat és mutatószámok értékeit tartalmazza
- **„Modell” lap:** ezen a lapon található a modell célfüggvényeinek és fontosabb feltételeinek összefoglalása
- **„Eredmények” lap:** a modell fontosabb eredményeinek áttekintését tartalmazza.

Az Excel-modell „A”, „L”, „Modell”, valamint „Eredmények” lapjainak tartalmát a tanulmány mellékletében is bemutatjuk.

Budapesti Corvinus Egyetem
Biztosítási Oktató és Kutató Csoport – ALM Kutatócsoport

„A” lap:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zérókupon hozamgörbe	9,51%	9,07%	8,80%	8,57%	8,35%	8,13%	7,90%	7,68%	7,47%	7,29%
DF: $v(t, t_k)$ vektor	0,9131	0,8405	0,7764	0,7196	0,6696	0,6257	0,5872	0,5532	0,5229	0,4950

A mátrix

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Eszk.sorszám:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,08500									
2	0,06500	1,06500								
3	0,09000	1,09000								
4	0,06250	0,06250	1,06250							
5	0,09250	0,09250	1,09250							
6	0,06250	0,06250	0,06250	1,06250						
7	0,09500	0,09500	0,09500	1,09500						
8	0,07000	0,07000	0,07000	0,07000	1,07000					
9	0,08250	0,08250	0,08250	0,08250	1,08250					
10	0,07500	0,07500	0,07500	0,07500	0,07500	1,07500				
11	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750	1,06750		
12	0,05500	0,05500	0,05500	0,05500	0,05500	0,05500	0,05500	0,05500	1,05500	
13	0,08000	0,08000	0,08000	0,08000	0,08000	0,08000	0,08000	0,08000	0,08000	1,08000
14	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750	0,06750
15	0,07500	0,07500	0,07500	0,07500	0,07500	0,07500	0,07500	0,07500	0,07500	0,07500
A*x vektor	17 515 820	49 086 812	15 463 705	15 463 705	15 463 705	15 463 705	15 463 705	15 463 705	19 248 417	15 255 546

$a_{ik} \cdot v(t, t_k)$ mátrix

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Eszk.sorszám:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,99074	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	0,05935	0,89517	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
3	0,08218	0,91618	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
4	0,05707	0,05253	0,82496	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,08446	0,07775	0,84826	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
6	0,05707	0,05253	0,04853	0,76462	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
7	0,08675	0,07985	0,07376	0,78801	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
8	0,06392	0,05884	0,05435	0,05037	0,71647	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
9	0,07533	0,06934	0,06406	0,05937	0,72484	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,06848	0,06304	0,05823	0,05397	0,05022	0,67266	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
11	0,06164	0,05674	0,05241	0,04858	0,04520	0,04224	0,03964	0,59054	0,00000	0,00000
12	0,05022	0,04623	0,04270	0,03958	0,03683	0,03442	0,03230	0,03043	0,55163	0,00000
13	0,07305	0,06724	0,06211	0,05757	0,05357	0,05006	0,04698	0,04426	0,04183	0,53459
14	0,06164	0,05674	0,05241	0,04858	0,04520	0,04224	0,03964	0,03734	0,03529	0,03341
15	0,06848	0,06304	0,05823	0,05397	0,05022	0,04693	0,04404	0,04149	0,03922	0,03712

t_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_k \cdot t_{k+1}$	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110

„A” lap (folytatás)

[illegible]

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
132	156	182	210	240	272	306	342	380	420	

Budapesti Corvinus Egyetem
Biztosítási Oktató és Kutató Csoport – ALM Kutatócsoport

„L” lap:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zérókupon hozamgörbe	9,51%	9,07%	8,80%	8,57%	8,35%	8,13%	7,90%	7,68%	7,47%	7,29%
DF: $v(t, t_k)$ vektor	0,9131	0,8405	0,7764	0,7196	0,6696	0,6257	0,5872	0,5532	0,5229	0,4950

B mátrix		t									
Köt.sorszám:		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1						0,98008					
2	0,00307	0,00353	0,00400	0,00445	0,00487						
3											0,94938
4	0,00307	0,00353	0,00400	0,00445	0,00487	0,00528	0,00568	0,00611	0,00658	0,00706	
5											
6	0,00307	0,00353	0,00400	0,00445	0,00487	0,00528	0,00568	0,00611	0,00658	0,00706	
7											
8											
9											
10											
B*y vektor		1 534 959	1 763 129	1 999 077	2 224 654	198 453 632	1 583 705	1 705 049	1 832 617	1 972 630	97 055 056

$b_{jk} \cdot v(t, t_k)$ mátrix		t									
Köt.sorszám:		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,65626	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	0,00280	0,00296	0,00310	0,00320	0,00326	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
3	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,46993
4	0,00280	0,00296	0,00310	0,00320	0,00326	0,00330	0,00334	0,00338	0,00344	0,00349	0,00349
5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
6	0,00280	0,00296	0,00310	0,00320	0,00326	0,00330	0,00334	0,00338	0,00344	0,00349	0,00349
7	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
8	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
9	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

t_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_k \cdot t_{k+1}$	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110

Budapesti Corvinus Egyetem
Biztosítási Oktató és Kutató Csoport – ALM Kutatócsoport

„L” lap (folytatás):

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
7,13%	7,01%	6,94%	6,93%	6,99%	7,13%	7,13%	7,13%	7,13%	7,13%
0,4688	0,4434	0,4179	0,3913	0,3628	0,3324	0,3103	0,2896	0,2704	0,2524

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
									0,84964
0,00756	0,00808	0,00861	0,00915	0,00968	0,01020	0,01074	0,01130	0,01191	0,01252
1 511 105	1 616 893	1 721 643	1 829 505	1 935 293	2 039 007	2 147 906	2 259 916	2 382 298	172 431 925

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum b_{jk} * v(t, t_k)$	$\sum t_k * b_{jk} * v(t, t_k)$	$\sum t_k * t_{k+1} * b_{jk} * v(t, t_k)$
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,65626	3,28130	19,68779
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,01534	0,04717	0,22260
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,46993	4,69929	51,69224
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,03229	0,18327	1,48526
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,21443	0,21443	4,28861	90,06082
0,00354	0,00358	0,00360	0,00358	0,00351	0,00339	0,00333	0,00327	0,00322	0,00316	0,06648	0,70896	10,37294
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
Kötelezettségek állományára vonatkozó érték:										240 722 989	2 153 464 750	29 386 577 994

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
132	156	182	210	240	272	306	342	380	420	

Budapesti Corvinus Egyetem
Biztosítási Oktató és Kutató Csoport – ALM Kutatócsoport

„Modell” lap (részlet):

t (évek)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
zérópon hozamgörbe	9,51%	9,07%	8,80%	8,57%	8,35%	8,13%	7,90%	7,68%	7,47%	7,29%
DF: $v(t, t_k)$ vektor	0,9131	0,8405	0,7764	0,7196	0,6696	0,6257	0,5872	0,5532	0,5229	0,4950

Eszközök jellemzői

Eszk.sorszám	x vektor	p vektor	x' vektor	x'' vektor	$x_i \cdot p_i$	$x' \cdot \Sigma x_i \cdot p_i$	$x'' \cdot \Sigma x_i \cdot p_i$
1	0	1,031255313	0	1	0	0	238 633 423
2	31 570 993	0,990742719	0	1	31 278 731	0	238 633 423
3	0	0,954518359	0	1	0	0	238 633 423
4	0	0,998359798	0	1	0	0	238 633 423
5	0	0,934567731	0	1	0	0	238 633 423
6	0	0,922749372	0	1	0	0	238 633 423
7	0	1,028365769	0	1	0	0	238 633 423
8	0	0,943949991	0	1	0	0	238 633 423
9	0	0,966611003	0	1	0	0	238 633 423
10	0	0,936969536	0	1	0	0	238 633 423
11	0	0,864329268	0	1	0	0	238 633 423
12	3 784 712	1,010470562	0	1	3 824 340	0	238 633 423
13	0	0,960147959	0	1	0	0	238 633 423
14	12 700 253	1,016384692	0	1	12 908 342	0	238 633 423
15	191 977 053	0,992941641	0	1	190 622 010	0	238 633 423
összesen:					238 633 423		

Kötelezettségek jellemzői

Köt.sorszám	y vektor	q vektor
1	200 000 000	0,8454
2	200 000 000	0,0181
3	100 000 000	0,7064
4	100 000 000	0,0423
5	200 000 000	0,4704
6	200 000 000	0,1047
7		
8		
9		
10		

z_1	0,00000
z_2	0,24169
$z_1 + z_2$	0,24169

$\Sigma x_i \cdot p_i$	238 633 423,28
$\Sigma y_j \cdot q_j$	362 612 703,35

$\Sigma x_i \cdot \Sigma a_{jk} \cdot v(t, t_k) = P_a$	240 722 988,69
$\Sigma y_j \cdot \Sigma b_{jk} \cdot v(t, t_k) = P_b$	240 722 988,69

$\Sigma x_i \cdot \Sigma t_k \cdot a_{jk} \cdot v(t, t_k) / P_a$	8,95
$\Sigma y_j \cdot \Sigma t_k \cdot b_{jk} \cdot v(t, t_k) / P_b$	8,95

$\Sigma x_i \cdot \Sigma t_k \cdot t_{k+1} \cdot a_{jk} \cdot v(t, t_k) / P_a$	122,32
$\Sigma y_j \cdot \Sigma t_k \cdot t_{k+1} \cdot b_{jk} \cdot v(t, t_k) / P_b$	122,08
$\Sigma x_i \cdot \Sigma t_k \cdot t_{k+1} \cdot a_{jk} \cdot v(t, t_k) / P_a + z_1 \cdot z_2$	122,08

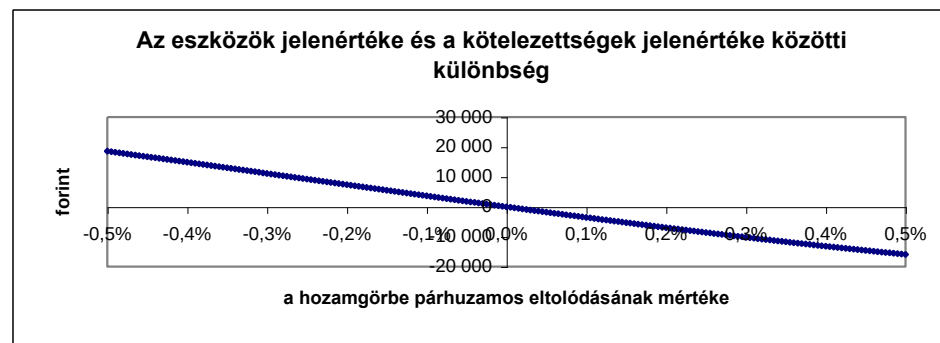
„Eredmények” lap:

Az optimális befektetési portfólió összetétele:

<i>Eszköz sorszáma</i>	<i>ennyi forintnyi névértékű értékpapírt kell vásárolnia a biztosítónak</i>
1	0
2	31 570 993
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	3 784 712
13	0
14	12 700 253
15	191 977 053

Fontosabb mutatószámok alakulása:

	<i>Eszközök</i>	<i>Kötelezettségek</i>
Jelenértéke (Ft):	240 722 989	240 722 989
Átlagideje (duration):	8,95	8,95



Források

- ✓ Asset-liability management for insurers, Sigma No.6/2000 SwissRE, pp 36
- ✓ Bodie/Kane/Marcus[1996]: Befektetések, BÉTA Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- ✓ Clark, G.: Asset & Liability Modelling – The way ahead? Staple Inn Actuarial Society, January 1992, pp 48
- ✓ Dardis, A. and Vinh Loi Huynh: Bridging the Gap Between Financial Economists and Actuaries: A New Asset-Liability Management Model, Staple Inn Actuarial Society, Febr. 1995, pp 38
- ✓ De Felice, M: Immunization Theory: An Actuarial Perspective on Asset-Liability Management, in: Financial Risk in Insurance, (ed: Ottaviani, G), Springer, 1995, pp 63-85
- ✓ Li, S. X.: A Satisficing Chance Constrained Model in the Portfolio Selection of Insurance Lines and Investments, Journal of the Operational Research Society (1995, pp:1111-1120)
- ✓ McCutcheon, J.J.-Scott, W.F.: The matching of assets and liabilities, in An Introduction to the Mathematics of Finance, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, 1998, Chapter 10: Yield curves, discounted mean terms, matching, and immunization, pp 230-250
- ✓ Newton L. Bowers, Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt: Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois (1986)
- ✓ OWC[2001]: Study on the risk profile and capital adequacy of financial conglomerates. Oliver, Wyman & Company
- ✓ Principles for a financial assessment framework, Pensions and Insurance Supervisory Authority, internet: <http://www.pvk.nl>, pp 16
- ✓ PSZÁF[2004]: Beszámoló a felügyelt szektorok 2004. első félévi tevékenységéről. Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete, Budapest, 2004. szeptember 22.
- ✓ Roff, T: Asset and Liability Studies on a With Profit Fund, Staple Inn Actuarial Society, Oct. 1992, pp 38
- ✓ Results of the Survey on Asset Liability Management Practices of Canadian Life Insurance Companies, Report, Canadian Institute of Actuaries, May 2002, pp 23
- ✓ Survey on Asset Liability Management Practices of Canadian Life Insurance Companies, Questionnaire, Canadian Institute of Actuaries, March 2001, pp 11

- ✓ Száz, J.[2003]: Kötvények és opciók árazása. Az opciók szerepe a modern pénzügyekben. Pécsi Tudományegyetem Közgazdaság-tudományi Kar, Pécs
- ✓ Szüle, B.[2004]: Biztosítók és pénzügyi konglomerátumok az Európai Unióban. Biztosítási Szemle, L. évfolyam, 5. szám
- ✓ White Paper on the Solvency Test, Financial Assessment Framework, Apeldoorn, The Netherlands, March 2003. pp 44
- ✓ Wilkie, A.D.: The Risk Premium on Ordinary Shares, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, 1994. November, pp 43
- ✓ Wilkie, A.D. – Waters, H.R. and Yang, S.: Reserving, Pricing and Hedging for Policies with Guaranteed Annuity Options, British Actuarial Journal, Vol 9, Part II. 2003, pp 263-426
- ✓ Worldwide Asset-Liability Models, eds: Ziemba, W.T. and Mulvey, J.M. Cambridge University Press, 1998
- ✓ 2003. év LX törvény A biztosítókról és a biztosítási tevékenységről, III. fejezet Befektetési szabályok
- ✓ www.akk.hu