



VÁRGEDŐ BÁLINT

**A MAGYAR LAKOSSÁGI
JELZÁLOGHITELEK EGY SZTOCHASZTIKUS
NEMTELJESÍTÉSKORI VESZTESÉG
MODELLJE**

MNB-TANULMÁNYOK | 146.

2022

NOVEMBER

„A kedély és a munkakedv az örök fiatalság biztosítója”

Jókai



A MAGYAR LAKOSSÁGI JELZÁLOGHITELEK EGY SZTOCHASZTIKUS NEMTELJESÍTÉSKORI VESZTESÉG MODELLJE

MNB-TANULMÁNYOK | 146.

2022

NOVEMBER

Az „MNB-tanulmányok” sorozatban megjelenő írások a szerzők nézeteit tartalmazzák,
és nem feltétlenül tükrözik a Magyar Nemzeti Bank hivatalos álláspontját.

MNB-tanulmányok 146.

A magyar lakossági jelzáloghitelek egy sztochasztikus nemteljesítéskori veszteség modellje*

Írta: Várgedő Bálint

Budapest, 2022. november

Kiadja: Magyar Nemzeti Bank

Felelős kiadó: Hergár Eszter

1013 Budapest, Krisztina körút 55.

www.mnb.hu

ISSN 1787-5293 (on-line)

* Köszönettel tartozom Fukker Gábornak, Tőrös-Barczel Nikolettnek, Kim Donátnak és Burger Csabának a tanulmányhoz adott tanácsaikért, ötleteikért. Az esetleges hibákért engem terhel a felelősség.

Tartalom

Kivonat	5
Abstract	5
1. Bevezetés	7
2. Irodalom áttekintés	8
3. Módszertan	10
3.1. Sztochasztikus LGD modell	10
3.2. Sztochasztikus lakásár folyamatok	11
3.3. Fedezetérték-paraméterek kalibrációja	13
3.4. Lakásárindex paraméterek becslése	13
3.5. A fedezetértékek várható hozama és az idioszinkratikus kockázat	14
4. Adatok	16
5. Eredmények	17
5.1. Lakásárindexekre illesztett exponenciális Ornstein-Uhlenbeck folyamat	17
5.2. A kapott LGD értékek régiós bontásban	22
6. Összefoglaló	26
7. Referenciák	27
8. Melléklet	29
8.1. Várható LGD egyenlet levezetése	29
8.2. Az általánosított Ornstein-Uhlenbeck folyamat megoldása	30
8.3. Az általánosított Ornstein-Uhlenbeck folyamat feltételes várható értéke	31
8.4. Az idioszinkratikus folyamat megoldása és varianciája	31
8.5. Monte Carlo szimulációk eredményei	32
8.6. A trendtől szűrt loglakásárindexek regressziós eredményei	32
8.7. A trendtől szűrt loglakásárindexek regresszióinak reziduumainak normalitás tesztje	33
8.8. Kumulált loghozamok szórása az egyes régiók esetén (százalék)	33
8.9. Várható hozam és szórás a fedezet likvidálásának időtartamáig	34
8.10. LGD ráták részletes régiós bontásban (százalék)	35

Kivonat

A tanulmány magyar jelzáloghitelek folyósításkor várható nemteljesítéskori veszteség (LGD) rátáit elemzi egy sztochasztikus fedezeti értékre épülő LGD modell alapján. A modell implementálásának alapjaként a magyar régiós lakásárindexekre illesztett exponenciális Ornstein-Uhlenbeck folyamatok szolgálnak. Az adósságfék szabályok teljes kihasználása, azaz 80% hitelfedezeti mutató (HFM) esetén a várható LGD régiótól függően 30-40 százalékpont. A régiós bontású modellek eredményei szerint az LGD ráták községek esetén a legmagasabbak, Budapest és a közép-magyarországi városok esetén a legalacsonyabbak adott hitelfedezettségi szint mellett. Ez a különbség akár a hét százalékpontot is elérheti. Az országos modell alapján képzett LGD kockázati index szerint a magas HFM-mel rendelkező hitelezés visszaszorulása miatt, az újonnan kihelyezett jelzáloghitelek LGD profilja jelentősen javult Magyarországon 2009 óta. Eredményeim szerint az ingatlanárak és a bedőlések erős korrelációja miatt, a nemteljesítő fedezetek értékének várható hozama alacsony.

JEL-kódok: G21, G33

Kulcsszavak: jelzáloghitelek, visszafizetési arány, sztochasztikus folyamatok

Abstract

The paper analyses the Loss Given Default (LGD) rates of residential mortgages at origination, using a model based on stochastic collateral value. The implementation of the model is based on exponential Ornstein – Uhlenbeck processes fitted to the Hungarian regions' house price indices. According to the model results, in case of a mortgage with 80% loan-to-value ratio at origination, the expected LGD is around 30-40 percent, depending on the region. The highest LGD rates are estimated to municipalities, while the lowest rates are expected at Budapest and cities in the middle of the country. The range of the regional differences can reach 7 percentage point. According to the LGD Risk index based on the aggregated model, the LGD risk profile of recently issued mortgages improved significantly since 2009 in Hungary. Due to the strong negative relation between the house prices and mortgage default rates, the expected return on defaulted collateral value tends to be low.

JEL: G21, G33

Keywords: mortgage loans, recovery rates, stochastic processes

1. Bevezetés

A hitelkockázatokból fakadó veszteségek mértékét a csődvalószínűség mellett a nemteljesítéskori veszteség (Loss Given Default, LGD) nagysága határozza meg. Míg a jelzáloghitelek csődvalószínűségének modellezése esetén számos fejlett megoldás került implementálásra Magyarországon is (Szabó (2022); Banai et al. (2013)), addig a LGD módszertanok gyakran kevésbé kiforrottak. Ez a jelenség nem ország specifikus, a nemzetközi szakirodalom esetén is megfigyelhető. Az LGD ráták minél pontosabb modellezése már csak azért is fontos lehet, mert számos tanulmány szerint (Altman et al. (2005); Acharya et al. (2007)) az LGD és PD komponensek erős együttmozgást mutatnak.

A tanulmányban egy Frontczak és Rostek (2015) cikkére alapozott, sztochasztikus fedezeti érték melletti LGD modellt vizsgálok. A modell parametrizálása során, a hazai lakásárindexekre exponenciális Ornstein-Uhlenbeck sztochasztikus folyamatokat illesztettem, a további paramétereket a nemzetközi irodalommal összhangban állapítottam meg. A kapott modell eredményeit egy benchmark modell számaival vetettem össze.

A modell használatának előnye, hogy az LGD rátára ható különböző tényezők, mint például a fedezet várható felértékelődése, az elvárt hozam, a likvidálás költsége stb. jól elkülöníthetően elemezhetők. A tanulmányban elsősorban a lakásárváltozások hatását vizsgálom. A modellezés célja várható LGD ráták meghatározása, nem stressz scenáriók hatásának számszerűsítése, habár utóbbi is megvalósítható lenne a modellezési keretrendszerben.

A régiós és település méret (főváros, város, község) szerint bontott lakásárindexek adta granularitásának köszönhetően lehetséges a különböző régiók és települések szintjén modellezni a várható LGD rátát. Így a különböző régiók és település típusok LGD kockázatossága is összevethető.

Abból adódóan, hogy az eredményül kapott várható LGD függvény csak a folyósításkori hitelfedezeti mutatótól (HFM) függ, az újonnan folyósított hitelek HFM eloszlását felhasználva egy through-the-cycle szemléletű LGD kockázati index is előállítható. Az így képzett index a hitelportfólió minősége alapján határozza meg a bankszektor várható LGD kockázatának mértékét.

Újdonságérték lehet a szakirodalomban a magyar lakásárindexekre illesztett sztochasztikus folyamatok eredményeinek elemzése is. A folyamat paraméterei alapján ingatlan befektetésekre vonatkozó hozam és kockázat állítások is megfogalmazhatóak régiós és településtípus szerinti bontásban. Az LGD modell implementálása során felmerülő módszertani kérdések kidolgozása is új elemeket tartalmaz, ilyen a hitel bedőléséből adódó többlet információ hatása a fedezetérték hozamokra, illetve az ingatlanárak idioszinkratikus szórásának hatása a kumulált szórásra és LGD rátákra.

A következő fejezetben (2.) a vonatkozó szakirodalmat összegzem, majd a 3. fejezetben az elemzés módszertanát vezetem le. A 4. fejezetben a kutatáshoz használt adatokat mutatom be, majd az 5. fejezetben az empirikus eredményeket és a várható LGD modellezett mértéket prezentálom. A 6. fejezet a tanulmányt összegzi.

2. Irodalom áttekintés

Míg a hitelkockázat PD paraméterének becslésére rendkívül széles szakirodalom áll rendelkezésre, az LGD modellezését célzó tanulmányokból kevesebb született. Az LGD szakirodalom alapvetően megoszlik a felhasznált adatok granularitása alapján. A tanulmányok egy része granuláris, ügylet szintű adatok segítségével modellezi és jelzi előre az ügylet szintű vagy portfólió szintű LGD mutatókat statisztikai modellek segítségével. Másik részük a modellezés során elsősorban aggregált és nyilvánosan elérhető adatokra épül. A granuláris adatokra épülő modellek előnye a jobb illeszkedés és pontosabb előrejelzés lehet. Az aggregált adatokra épülő modellek nyilvánvaló előnye, hogy olyan esetekben is használhatóak, amikor nem áll rendelkezésre egységes, granuláris adatbázis a modellezésre. Így ezek modellek alkalmasak lehetnek teljes jelzáloghitel piacok elemzésére (Palmroos (2016)). Emellett kevesebb bemeneti adattal is használhatóak, azaz kevésbé részletes stressz scenárió definiálása is elegendő egy stresszteszt végzése során.

A granuláris megközelítést alkalmazó tanulmányok közül számos a vállalati szegmens modellezésével foglalkozik, lásd Gupton és Stein (2002) vagy Chalupka és Kopecsni (2008). A lakossági hiteleket vizsgáló tanulmányok között található Bellotti és Crook (2012) tanulmánya. A szerzők a hitelkártyák LGD rátáit modellezték 1999 és 2005 közötti egyesült királysági adatok alapján. Eredményeik szerint az ügyféladatokra vonatkozó változók mellett a makrogazdasági változók is szignifikáns magyarázó erővel bírnak.

A lakossági jelzáloghitelek LGD-jét Leuw és Meus (2012) elemezte empirikus módszerekkel egy brit bank adatai alapján. Kutatásukban kétszintű regressziót használtak, amely jobb illeszkedést mutatott az egyszintű regressziós modelljükhöz képest. Qi és Yang (2009) tanulmányukban magas HFM jelzáloghitelek LGD mutatóit vizsgálták. Eredményeik szerint az LGD-t jobban magyarázza a csődkori HFM (current LTV, CLTV) mint a folyósításkori HFM értéke, valamint, hogy lakáspiaci stressz időszakokban a nemteljesítéskori veszteség ráták szignifikánsan magasabbak. Calabrese (2014) a bázeli szabályozásban elvárt downturn LGD kiszámítására tesz javaslatot expanzív és recessziós LGD-k kevert eloszlása alapján. Egy olasz adatbázison becsült eredményeik szerint a downturn értékek az átlagos LGD-nél akár 17 százalékponttal is magasabbak lehetnek.

Az aggregált adatokon alapuló vagy elméleti alapokra épült modellek közé tartozik a Frye (2000) tanulmányában vázolt modell. A modell a fedezetérték-csökkenés és a növekvő csődgyakoriságok együttmozgásának hatására hívta fel a figyelmet a tőkekövetelmények számítása esetén. Modelljében a fedezetérték változását egy szisztematikus kockázati faktoron keresztül kötötte össze a csődvalószínűségekkel. Jokivuolle és Peura (2003) tanulmányában már a sztochasztikusan változó fedezet- és vállalatérték közötti összefüggés figyelembevételével vizsgálják az LGD-t a vállalati hitelek és kötvények esetén. Eredményeik szerint a várható LGD csökken a fedezetérték driftjének növekedése esetén és növekszik a fedezetérték volatilitása emelkedése esetén. Van Damme (2013) egy általános keretrendszert mutat be, melynek segítségével a sztochasztikus LGD modellek beemelhetők a hitelkockázat-kezelési és derivatívázási eljárásokba. A javasolt keretrendszer segítségével lehetséges a downturn LGD-k becslése is.

Frontczak és Rostek (2015) cikkükben lakossági jelzáloghitelek LGD-jét modellezik sztochasztikusan változó fedezeti érték mellett. Észrevételük miatt, miszerint az LGD hasonló egy long put opció kifizetéséhez – a fedezetértékének függvényében az LGD eleinte lineárisan csökken, majd nulla értéket vesz fel - derivatívázás témaköréből ismert módszereket alkalmaznak. Építve Fabozzi et al. (2012) munkásságára a lakásár-folyamatok kapcsán, a szerzők exponenciális Ornstein-Uhlenbeck folyamatot alkalmaznak a lakóingatlanok értékének modellezésére.

Ezt a modellezési keretrendszert használva Pelizza et al. (2020) megmutatta, hogy az olasz jelzálogpiacon a már csődöt jelentett hitelek túlértékelték lehetnek a vártnál magasabb LGD mutatóik miatt.

Ahhoz, hogy az LGD modellezéséről átfogóbb képet kapjunk érdemes a gyakorlati felhasználások szempontjából az egyik legfontosabb terület, a stressztesztelések során használt LGD modelleket is megismerni. A Bundesbank jelzáloghitel stressztesztjében Siemsen és Vilsmeier (2017) az LGD számszerűsítéséhez egy CLTV – LGD függvényt állítottak fel.

A függvényt egy metaanalízis alapján készítették szerzők. A különböző CLTV csoportok LGD értékeit Qi és Yang (2009) illetve Palmroos (2016) modell eredményeiből származtatták, majd egy polinomiális regresszió segítségével kötötték össze a különböző csoportok eredményeit egy folytonos függvénnyé. Mivel a Siemsen és Vilsmeier (2017) által modellezett német jelzáloghitel piac számos tekintetben eltért a Palmroos (2016) modelljéhez használt finn piachoz képest, a szerzőknek több változtatást is eszközölniük kellett a metaanalízis során. A stresszteszt során az ingatlanárindexre vonatkozó scenárió alapján határozták meg a kezdeti LTV-ből a CLTV-t. A magyar lakossági jelzáloghitelekre vonatkozó stressztesztjében Holló (2009) az LGD-t a csőd bekövetkezésekor HFM 100% feletti részeként származtatja számításai során, ahol a scenárió során a lakásárindex segítségével frissíti a fedezetként szolgáló lakások értékét.

Szintén a magyar lakossági jelzálog piac LGD-jét vizsgálva, egy bankközi adatbázis segítségével vizsgálva Tajti (2011) megállapította, hogy az általa lefedett időszakban a szabad felhasználású jelzáloghitelek átlagos LGD-je alacsonyabb (16,26%) a lakáscélú jelzáloghitelekénél (27,11%), igaz mindkét hitelcél szerinti csoport esetén jelentős szórás figyelhető meg.

A tanulmányomban javasolt modell Tajti (2011) modelljével szemben alacsonyabb adatigénnyel rendelkezik, így a teljes bankrendszerre vonatkozó elemzések esetén könnyebben alkalmazható vagy egyéb adathiányos helyzetekben. Emellett a modell paraméterei is könnyen értelmezhetőek és az adott paraméter vagy változó nemlineáris kapcsolata is megfelelően tükröződik a modell elméleti megalapozottságának köszönhetően. Ez különösen releváns a HFM és az LGD ráta esetén, a két mutató ugyanis erősen nemlineáris kapcsolatban áll egymással az eredményeim szerint.

Az ingatlanár folyamatok modellezéséhez elengedhetetlen egy megfelelő lakásárindex kiválasztása. Magyarország esetén három ismert index is publikálásra kerül negyedévente, az MNB, a KSH és Takarékbank lakásárindex is. Az MNB lakásárindex előnye, hogy az országos aggregált index mellett, részletes régiós és településméret szerinti bontásban is előáll. A Banai et al. (2017) által készített MNB lakásárindex hedonikus regressziós módszer alapján készül, időszakpáronkénti becslés segítségével, így ennek köszönhetően az idősor elemei nem revideálódnak egy új index pont értékének meghatározása esetén. Winkler (2021) egy többszöri eladásokon alapuló lakásárindex felállítására tett kísérletet magyar adatokon. A szerző konklúziója szerint azonban a többszöri eladáson keresztül ment ingatlanok nem reprezentatívak a teljes hazai ingatlan állományra, így a módszer limitált hasznosságára figyelmeztet.

Berki és Szendrei (2017) az MNB lakásárindexet alapul véve vizsgálta a lakásárak fundamentumok által meghatározott, hosszútávú egyensúlyi szintjét és a megfigyelt árak közti különbséget. Az általuk alkalmazott VECM módszertan eredménye szerint a lakásárindex, az újonnan kihelyezett lakáshitelek átlagos összege, a háztartások rendelkezésre álló jövedelme, valamint a lakásállomány között kointegrációs kapcsolat áll fent. A szerzők emellett megállapítják, hogy az egyensúlyi szinthez a lakásárak csak lassan térnek vissza, a lakásárrés gyakran perzisztens módon fennmarad.

3. Módszertan

A következő két szakaszban egy Frontczak és Rostek (2015) modelljére épülő, sztochasztikus fedezeti érték melletti lakossági jelzáloghitel LGD modellt vezetek be röviden. Először a jelzáloghitelek LGD rátája és a fedezetként szolgáló ingatlan értéke közötti összefüggést vezetem be. Ezt követően a sztochasztikusan változó ingatlanár folyamatot definiálom, majd ennek segítségével az ingatlanárak eloszlását határozom meg. A két komponens segítségével határozható meg a várható LGD értéke. Az LGD modellezési keretrendszer ismertetése után a modell kalibrációjának módszertanát részletezem, a becslési eljárást, a csődből adódó többletinformáció beépítését a fedezetérték várható hozamára, az egyedi szórás és a további paraméterek meghatározását.

3.1. SZTOCHASZTIKUS LGD MODELL

A jelzáloghitelek nemteljesítésének esetén a bank számára a fedezet tompíthatja az elszenvedett veszteségeket. Ha a fedezetként szolgáló ingatlan piaci értéke meghaladja a banknak a nemteljesítéskor fennálló kitétségét (EAD), és a bank rögtön képes lenne költség nélkül pénzzé tenni azt a piaci áron, a bank vesztesége az ügyleten nulla lenne. Amennyiben a fedezet értékesítéséből befolyó pénzáram értéke (beleértve a pénz időértékét és a kezelési költségeket) nem fedezi a bank felé fennálló tartozást, a veszteség mértéke az EAD és a fedezet értékének különbsége. Formálisan ugyanez:

$$Loss = \begin{cases} EAD - \tilde{C}_{T_D}, & \text{ha } \tilde{C}_{T_D} < EAD \\ 0, & \text{ha } EAD \leq \tilde{C}_{T_D} \end{cases} \quad (1)$$

Ahol $Loss$ a bankot érő veszteséget jelöli, T_D a nemteljesítés időpontját, C_{T_D} pedig a fedezet értékesítéséből befolyó pénzáram értékét a nemteljesítés időpontjában. A \tilde{C}_{T_D} , azaz a fedezetből befolyó pénzáram értéke a fedezetlikvidálás időpontjában vett értékének (C_{T_L} , ahol T_L a likvidálás időpontja) r elvárt hozam mellett diszkontált értéke, csökkentve a k felmerülő költséghányaddal:

$$\tilde{C}_{T_D} = e^{-r(T_L - T_D)}(1 - k)C_{T_L} \quad (2)$$

Modellezési szempontból a csődbe ment adósok ingatlanjainak diszkont tényezőjeként is értelmezhető a felmerülő költséghányad. Hasonlóképpen a fedezetek gyakori likvidálási csatornájául szolgáló ingatlanárverési diszkontként is. A bank által a fedezet pénzáramától elvárt hozam (r) a kockázatmentes hozam és az elvárt kockázati prémium összegeként adódik, mely az egyedi ingatlanár bizonytalanságát kompenzálja.

Felhasználva ez eddigieket (1. és 2. egyenlet) az LGD a következőképpen fejezhető ki a fedezet értékének függvényében:

$$LGD_{T_D} = \max\left(0, \frac{EAD - e^{-r(T_L - T_D)}(1 - k)C_{T_L}}{EAD}\right) \quad (3)$$

Ezen a ponton is felfedezhető a párhuzam a LGD és egy long put opció kifizetése (a $\frac{C_T}{EAD}$ folyamatra, EAD strike-kal) között.

Ebből adódóan a várható LGD :

$$E[LGD_{T_D}] = E\left[\max\left(0, \frac{EAD - e^{-r(T_L - T_D)}(1 - k)C_{T_L}}{EAD}\right)\right] \quad (4)$$

A várható érték így egy megfelelő C_T folyamat definiálását követően, az opció árazáshoz hasonló integrálegyenletek segítségével megkapható. Az opció árazással ellentétben, a várható LGD kiszámításához „real world” valószínűségi mérték használata szükséges, így lakásárfolyamat paramétereinek meghatározásakor a múltban megfigyelt adatokra szükséges támaszkodni.¹

3.2. SZTOCHASZTIKUS LAKÁSÁR FOLYAMATOK

Egy megfelelő sztochasztikus folyamat feltételezése és definiálása után levezethető a fedezetérték eloszlása a likvidáció időpontjában. A fedezetérték-folyamatot egy általános ingatlanpiaci folyamat és egy egyedi ármozgásokat leíró folyamat összegeként modelleztem. A fedezetérték kumulált loghozama (Y_t) így a piaci (Y_t^{piac}) és az egyedi kumulált loghozam (Y_t^{idio}) összegeként áll elő:

$$Y_t = Y_t^{piac} + Y_t^{idio} \quad (5)$$

A fedezetérték szintje pedig a következő egyenlőség áll fent:

$$C_t = C_0 e^{(Y_t^{piac} + Y_t^{idio})} = C_0 e^{Y_t} \quad (6)$$

Fabozzi et al. (2012) az exponenciális Ornstein-Uhlenbeck (OU) folyamatot javasolja az ingatlanpiac árszintjének modellezésére. Ennek oka, hogy a folyamat kielégíti a nemzetközi lakóingatlanpiacokon megfigyelt három jelenséget:

- Az ingatlanpiaci árakra jellemző, hogy rövidtávon ingadoznak, de emellett egy hosszútávú trendhez közelítenek (mean-reversion)
- Az ingatlanpiaci hozamok autokorreláltak
- Az ingatlanárak minden időszakban garantáltan pozitív értéket vesznek fel

Amennyiben az ingatlanpiaci árak exponenciális OU folyamatot követnek, az árak logaritmus (Y_t^{piac}), ami a lakásárindexek kumulált loghozamának is tekinthető, OU folyamatot követ, minden időszakban. Az OU folyamat dinamikáját definiáló sztochasztikus differenciálegyenlet,

$$dY_t^{piac} = \left(\frac{d\varphi_t}{dt} + \kappa(\varphi_t - Y_t^{piac}) \right) dt + \sigma^{piac} dW_t^{piac} \quad (7)$$

ahol φ_t a logaritmizált lakásárindexekre jellemző hosszútávú trend, egy egyszerű lineáris modell alapján közelíthető. A φ_t jelölés a trendhez visszahúzás erejét jellemző paramétert, σ^{piac} pedig a folyamat volatilitását jelöli. A W_t^{piac} jelölés a sztenderd Brown-mozgást jelöli, ami a folyamat bizonytalanságáért felel.² Így az egyenlőség jobb oldalán álló három tag rendre a trendszerű növekedésért, a trendhez visszahúzásért, illetve a bizonytalanságért felelős tagok.

A sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása a következő Gauss-folyamat minden időpontra (lásd Melléklet 8.2):

$$Y_T^{piac} = \varphi_T - (\varphi_t - Y_t^{piac}) e^{-\kappa(T-t)} + \sigma^{piac} \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} dW_s^{piac} \quad (8)$$

¹ A fenti gondolatmenet során replikáló portfólió összeállítására nincs szükség – abban az esetben lenne rá szükség, ha azt vizsgálnánk, hogy tudja a bank ingatlanpiaci eszközök segítségével létrehozott replikákkal fedezni az LGD-n keresztüli kitétséget az ingatlanpiaci árváltozásokra.

² A sztochasztikus differenciálegyenlet a Vasicek-féle kamatláb modell kibővítésének tekinthető, hosszútávú átlag helyett trenddel.

A megoldás segítségével megadható (lásd Melléklet 8.3) a feltételes növekedése a folyamatnak (μ_Y^{piac}),

$$\mu_Y^{piac} = E[Y_T^{piac} | Y_t^{piac}] = \varphi_T - (\varphi_t - Y_t^{piac})e^{-\kappa(T-t)} \quad (9)$$

illetve a feltételes szórása (σ_Y^{piac}) (lásd Melléklet 8.3),

$$\sigma_Y^{piac} = \sqrt{Var[Y_T^{piac} | Y_t^{piac}]} = \sigma^{piac} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}} \quad (10)$$

A 10. egyenlet jobboldalán látható tag mutatja, milyen volatilitás csökkentő hatása van a trendhez visszahúzásnak. Érdekes még megjegyezni, hogy amennyiben a paraméter 0 közeli, azaz a trendhez visszahúzás nagyon gyenge, illetve nem létezik, az OU folyamat egy Brown-mozgássá redukálódik egy drifttel. Így a feltételes szórás is σ^{piac} -hez közelít, amennyiben a „mean-reversion” nem tudja tompítani a folyamat bizonytalanságát.

A fedezetérték alakulása az általános ingatlanpiaci folyamatokon felül, az adott fedezet egyedi ármozgásai is hatással vannak. Ezeket az egyedi ármozgásokat a lakásárindexek nem tudják megragadni, hiszen céljuk pont ezek kiszűrése. Az egyedi, loghozamban mért ármozgásokra a következő feltételezésekkel éltem:

- nulla várható értékűek
- szórásuk az ingatlanok egyedi szórását tükrözik
- függetlenek az általános ingatlanpiaci tendenciáktól
- függetlenek a későbbi és korábbi egyedi ármozgásoktól
- normális eloszlást követnek.

Ebből adódóan a következő folyamattal írhatóak le a kumulált egyedi loghozamok (Y_t^{idio}):

$$dY_t^{idio} = \sigma^{idio} dW_t^{idio} \quad (11)$$

ahol σ^{idio} az egyedi loghozamok szórása, W_t^{idio} egy sztenderd Brown-mozgás, ami független a piaci hozamokat alakító W_t^{piac} folyamattól. A folyamat megoldása alapján adódik (lásd 8.4. Melléklet), hogy feltételes varianciája a következő:

$$Var[Y_T^{idio} | Y_t^{idio}] = (\sigma^{idio})^2 \cdot (T - t) \quad (12)$$

A piaci és az egyedi folyamatok eredményei alapján meghatározható a fedezetérték eloszlása is. Az 5. egyenletbe behelyettesítve a folyamatokat a következő egyenletet kapjuk, ami alapján a folyamat szintén Gauss-folyamat:

$$Y_T = \varphi_T - (\varphi_t - Y_t^{piac})e^{-\kappa(T-t)} + \sigma^{piac} \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} dW_s^{piac} + \sigma^{idio} \cdot W_T^{idio} \quad (13)$$

aminek várható értéke és varianciája – felhasználva, hogy a két folyamat független - a következőképpen alakul:

$$\mu_Y = \mu_Y^{piac} + 0 = \varphi_T - (\varphi_t - Y_t^{piac})e^{-\kappa(T-t)} \quad (14)$$

$$\sigma_Y^2 = Var[Y_T^{index} | Y_t^{index}] + Var[Y_T^{idio} | Y_t^{idio}] = (\sigma^{piac})^2 \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} + (\sigma^{idio})^2 \cdot (T - t) \quad (15)$$

A lakásárak logaritmusának vizsgálata után megállapítható a lakásárak szintjére, hogy a valószínűségi változó minden időszakban lognormális eloszlást követ, hiszen annak logaritmusa (μ_Y, σ_Y^2) eloszlást követ. Amennyiben behelyettesítjük az előző szakaszban az függvényét a függvényében (3. egyenlet), illetve az imént meghatározott eloszlását, megkapjuk a várható integrál egyenletét, ami a 6. egyenlet behelyettesítésével megoldható. Az integrálegyenlet értelmezhető úgy, hogy mint a transzformált ingatlanár várható értéke, az első tag az LGD függvénnyel transzformált ingatlanár, a második pedig az ingatlanár eloszlása.

$$E[LGDT_D] = \int \max\left(0, \frac{EAD - e^{-r(T_L - T_D)}(1 - k)C_{T_L}}{EAD}\right) \frac{1}{C_{T_L} \sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln C_{T_L} - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}\right)^2\right] dC_{T_L} \quad (16)$$

A várható formula tovább alakítható az integrál megoldása segítségével (lásd 8.1 Melléklet),

$$E[LGDT_D] = \Phi(-d) - (1 - k)e^{-r(T_L - T_D)} \frac{C_t}{EAD} e^{\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2} \Phi(-(d + \sigma_Y)) \quad (17)$$

ahol $d = \frac{\ln \frac{C_t}{X} + \mu_Y}{\sigma_Y}$, illetve $X = \frac{EAD}{1 - k} e^{r(T_L - T_D)}$.

A kapott várható formula az intuíciónak megfelelően csökken a C_t értékében, a kezdeti fedezet minél magasabb értéke alacsonyabb LGD értékeket indukál. Hasonlóan a $\frac{C_t}{EAD}$ hányados, azaz HFM értékének növekedésével is csökken a veszteség (Frontczak és Rostek (2015)). A 17. egyenletben látható formula Monte Carlo szimulációk segítségével is validálásra került (lásd 8.5. Melléklet).

3.3. FEDEZETÉRTÉK-PARAMÉTEREK KALIBRÁCIÓJA

A fedezetérték-paraméterek (μ_Y, σ_Y) meghatározását a piaci paraméterek és az egyedi szórás segítségével végeztem, a 14. és 15. egyenlet szerint. A piaci paramétereket a lakásárindex-folyamat alapján becsültem, az egyedi szórás meghatározásához szakirodalmi eredményekre támaszkodtam. A lakásárak trendjének meghatározásakor nem a nyers lakásárindex trendjét vettem alapul, hanem egy olyan trendet számítottam a lakásárindex és egy csódráta idősor segítségével, ami kontrollál a jelzaloghitel csődök és a lakáspiaci folyamatok együttmozgására. Erre azért van szükség mert a csődbe ment hitelek esetén felülreprezentáltak az alacsony ingatlanpiaci hozamok a csődesemények okozta összetételhatás miatt.

A következő szakaszokban a kalibráció lépéseit részletezem és indoklom. Elsőként a nyers lakásárindex folyamat trend tisztítását és az OU paraméterek becslési eljárását részletezem, Fabozzi et al. (2012) ajánlásának megfelelően. Majd a módosított trendfüggvény meghatározását, végül az egyedi szórás beépítését mutatom be.

3.4. LAKÁSÁRINDEX PARAMÉTEREK BECSLÉSE

A lakásárindexekre illesztett exponenciális OU folyamat paramétereinek becslését Fabozzi et al. (2012) ajánlásának megfelelően két lépcsőben végeztem el. Fabozzi et al. (2012) első lépésben egy lineáris trend modell - $\varphi_t = a + b \cdot t$ - becslését javasolja a logaritmizált árindexre (Y_t^{index}).

$$Y_t^{index} = \varphi_t + \tilde{Y}_t = a + b \cdot t + \tilde{Y}_t \quad (18)$$

Az így származtatott \tilde{Y}_t a loglakásárindex folyamat trendtől szűrt része. A trendtől szűrt rész így mint a trend model hibatagja áll elő, nulla várható értékkel és a modell szerint OU folyamatot követ. Ezután a kapott konstans várható értékű OU folyamat paramétereinek becslését Chaiyapo és Phewchean (2017) által vázolt legkisebb négyzetek eljárásával (LSE) végeztem.

A 8. egyenletbe a $T = t + \Delta t$ behelyettesítéssel, felhasználva a 9. és 10. egyenlet eredményeit, és $Y_t^{index} = \varphi_t + \tilde{Y}_t$ a helyettesítést, adódik a következő diszkrétizált egyenlet, ahol ΔW_t^{Biac} a Brown-mozgás növekménye független azonos eloszlású és eloszlást követ:

$$\tilde{Y}_{t+\Delta t} = \tilde{Y}_t \cdot e^{-\kappa \cdot \Delta t} + \sigma^{piac} \sqrt{\frac{1-\exp(-2\kappa\Delta t)}{2\kappa}} \Delta W_t^{piac} \quad (19)$$

Az egyenlet paramétereit becsülhetők a következő modellel:

$$\tilde{Y}_{t+\Delta t} = \beta \cdot \tilde{Y}_t + \varepsilon_{t+\Delta t} \quad (20)$$

ahol, $\beta = e^{-\kappa \cdot \Delta t}$, $\varepsilon_{t+\Delta t} \sim N\left(0, \sigma^{piac} \sqrt{\frac{1-\exp(-2\kappa\Delta t)}{2\kappa}}\right)$ független azonos eloszlású. Az egyenleteket átalakítva adódik:

$$\kappa = \frac{-\log(\beta)}{\Delta t} \quad (21)$$

$$\sigma^{piac} = sd(\varepsilon_t) \cdot \sqrt{\frac{2\kappa}{1-\exp(-2\kappa\Delta t)}} \quad (22)$$

A becslések során Δt értéket 1/4 évben határoztam meg a lakásárindex adat gyakorisága alapján.

3.5. A FEDEZETÉRTÉKEK VÁRHATÓ HOZAMA ÉS AZ IDIOSZINKRATIKUS KOCKÁZAT

A gazdaságot érintő stressz időszakokban gyakori jelenség, hogy megugranak a csődráták a gazdaság egészében beleértve a jelzáloghitel piacot is (Ali (2010), Koopman (2009)). Emellett viszont a lakáspiaci hozamokra is jellemző az alulteljesítés stressz időszakokban (Rünstler (2018)). Ebből adódóan viszont a csődbe ment hitelek esetén felülreprezentáltak az alacsony hozamok, hiszen a nemteljesítő hitelek között is felülreprezentáltak a stressz időszakban bekövetkezett csődök. Így a lakásárhozamok historikus átlaga nem egyezik meg a nemteljesítő hitelek mögött fedezetként álló lakásárak hozamának átlagával, pusztán a hozamok időzítéséből adódóan.³

Feltételezve, hogy fedezet értékesítése hasonló lakáspiaci környezetbe zajlik le, mint ami a csőd időpontjában fennáll, a fedezetek historikus átlagos hozama (\bar{c}_t^{fed}) közelíthető az adott évi csődrátákkal (DR_t) súlyozott lakásárindex-hozamokkal (c_t^{index}), hiszen a csődrátával arányos a nemteljesítő hitelek mögötti fedezetek száma is. Így bevezetve jelölést a idősor átlagára, formálisan a historikus átlag becslése a következőképpen áll elő:

$$\bar{c}_t^{fed} = \sum_{t=1}^n c_t^{index} \cdot \frac{DR_t}{\overline{DR}} \cdot \frac{1}{n} \quad (23)$$

Az így kapott \bar{c}_t^{fed} -et tehát a fedezetek trend modelljében használom a módosíthatatlan lakásárindexen becsült b együttható helyett. A modellezés során használt további piaci OU paraméterek (σ^{piac} , κ) változatlanul a trendtől szűrt logaritmizált lakásárindexből (\tilde{Y}_t) származnak.

A magyar lakáspiaci kapcsán még nem született tanulmány, ami az idioszinkratikus szórás meghatározására tett volna kísérletet, így nemzetközi tanulmányok eredményeire támaszkodtam. Miller és Pandher (2008) egy kétfaktoros modell segítségével vizsgálták az amerikai ZIP-kódonkénti részlakáspiacek árváltozásait. A két magyarázó faktor a részvénypiaci hozamok és az országos lakásárindex változások voltak, amiknek a segítségével a szisztematikus gazdasági és a lakáspiaci általános kockázatát tudták kiszűrni. Eredményeik szerint a reprezentatív egyedi kockázat becsült mértéke 10% körüli. Giacoletti (2021) egy kaliforniai egyedi lakásár tranzakciókon alapuló elemzést végzett, az egyedi lakásokhoz kapcsolódó abnormális hozamok meghatározásához a helyi ZIP-kód szintű lakáspiaci árváltozásait szűrte ki. Az ezzel a módszerrel felállított idioszinkratikus szórás görbéje szerint a 2 éven belül eladott lakások esetén ez 19%, 5 év esetén 12%, míg 15 év esetén ez 7,5%-ra csökken. A nemzetközi irodalom eredményei alapján a régiós lakásárindex mozgásain felül 10% körüli évesített idioszinkratikus szórás (σ^{idio}) adódhat az egyedi házak árváltozásai esetén.

³ Emellett elképzelhető, hogy a csődbe ment hitelek mögötti fedezet keresztmetszeti nézőpontból is alulteljesíti az ingatlanállományt, de erre nem a lakásárfolyamat paramétereinél kontrollálok, hanem az aukciós diszkont mértékében.

Az egyedi szóráshoz kapcsolódik még a községek index országosan aggregált idősorának esete. Ahogy a városok esetén is látszik, az országosan aggregált index a régiós indexek szórásának egy részét eltakarják, ebből adódóan az aggregált mutató szórása alacsonyabb lesz. Ahhoz, hogy a községek esetén is tükröződhessen ez a hatás – ahol ez a települések nagy száma és potenciálisan még a városoknál is jelentősebb heterogenitása miatt – jelentősebb is lehet, létrehoztam régióként szintetikus község volatilitás paramétereket. Az ezek segítségével számított LGD mutatók alapján összevethetőek a különböző régiók LGD szintjei is. A kapott volatilitás paraméter így tükrözi, mind a községek általános kockázatát, mind a régió kockázatát az országoshoz mérve, utóbbit a városok alapján számszerűsítettem. Formálisan ezeket az adott régióra (i) vonatkozó város index ($\sigma_{V,i}^{piac}$) alapján, annak a község ($\sigma_{K,aggr}^{piac}$) és városok ($\sigma_{V,aggr}^{piac}$) aggregált indexek volatilitás paraméter arányának felskálázásával állítottam elő:

$$\sigma_{K,i}^{piac} = \sigma_{K,aggr}^{piac} \cdot \frac{\sigma_{V,i}^{piac}}{\sigma_{V,aggr}^{piac}} \quad (24)$$

Így az egyes régiók fedezetérték folyamat paramétereit leíró egyenletek a következők lesznek minden régió-település típus (i) esetén. A várhatóértékre adódik (a 14. egyenlet alapján) a várható fedezet loghozama és az adott régió-település típus, valamint az országos trend különbségének összege, szorozva likvidálásig hátralevő idővel:

$$\mu_Y(i) = (\bar{c}_t^{fed} + b_i - b_{aggr}) \cdot T_L \quad (25)$$

a feltételes varianciára (σ_Y^2 , a 15. egyenlet alapján) a régió-település típus piaci varianciájának és az egyedi varianciának az összege:

$$\sigma_Y^2(i) = (\sigma_i^{piac})^2 \frac{1 - e^{-2\kappa_i T_L}}{2\kappa_i} + (\sigma^{idio})^2 \cdot T_L \quad (26)$$

További LGD paraméterek

A felvázolt sztochasztikus LGD modellben a lakásár-folyamat paraméterein kívül is több tényező meghatározása is szükséges, ahogy az a várható LGD egyenletéből (17. egyenlet) látszik. Ezek esetén a szakirodalom eredményeire alapoztam a paramétereket. Az EAD-t konzervatív módon a nulladik időpontban (például hitelfolyósításkor) számított HFM-ben határoztam meg a kezdeti ingatlan érték arányában, azaz a hitelösszeg nem amortizálódik. Ez összhangban van a Siemsen és Vilsmeier (2017) stressztesztjében használt LGD modell feltételezésével. Ez az egyszerűsítő feltevés egyben biztosítja a statikus mérleg feltevést - legalábbis portfólió szinten – hiszen a csőd időpontig hátralevő időben az esetleges törlesztések mellett új hitelkihelyezések is várhatóak így a portfólió egészét tekintve a két hatás egymás ellen hat (Siemsen és Vilsmeier (2017)). Egy-egy hitelügylet vizsgálata esetén az EAD szinten tartásának feltevése konzervatívnak mondható, de ez a hatás limitált a rövid csődig hátralevő idő miatt, ami 1 év. A Frontczak és Rostek (2015) cikkben vázolt cash recovery rátát sem alkalmaztam, azaz a bedőlt adósok részéről további törlesztéssel nem számoltam.

A paramétert a nemteljesítő hitelek mögötti fedezetek diszkont tényezőjeként alkalmaztam. Az, hogy egy adós csődbe megy plusz információt tartalmazhat az adós ingatlanának értékéről is. Erre az eredményre jutott Campbell et al. (2011) is, az általuk vizsgált Massachusetts-i mintán 27%-os keresztmetszeti diszkontot tudtak kimutatni a zálogjog érvényesítésen átesett lakóingatlanok esetén. Ezt többek között az ingatlanok állapotával és illikviditási problémákkal indokolták a szerzők. A tanulmány fényében a modellben alkalmazott paraméter értékét 30%-ban határoztam meg, hogy a banknál felmerülő workout költségeket is tükrözze.

A csőd időpontjához képest később befolyó pénzáramok értékének meghatározásához megfelelő diszkont ráta szükséges. Az EBA/GL/2017/16 által megállapított iparági sztenderd szerint ez 3 havi referencia kamatláb (pl. BUBOR) és egy 5 százalékpontos kockázati prémium összegeként áll elő. A jelenlegi kamatkörnyezetben ez 10%-os diszkontrátát jelent. A kezdeti időponttól a csőd bekövetkeztéig eltelt idő, T_L 1 év, az értékesítésig eltelt idő, T_D 4 év, összhangban a benchmarkként használt LGD modell dokumentációjában javasolt, a csődeseményt követő 3 éves értékesítési idővel. Így tehát a lakásárak 4 éven keresztül változnak, egészen az értékesítés pillanatáig. Az MNB 2019 decemberi pénzügyi stabilitás jelentéséből is az szűrhető le, a nemteljesítő adósok jellemzően több évet töltenek késedelemben a megállapodás előtt.

4. Adatok

LAKÁSÁRINDEX

Az MNB lakásárindex országosan aggregált időszora 1990 Q1 időszakától, míg a régió és település méret szerint megbontott idősorok 2001 Q1-től érhető el, negyedéves gyakorisággal. A mintában szereplő utolsó megfigyelés 2021 Q3. Az elemzéshez a nominális lakásárindexet használok, hiszen hitelkockázati szempontból is a fedezet nominális fel vagy leértékelődése releváns a bank számára.

A lakóingatlanok piaca földrajzi szempontból heterogén, különböző régiókban vagy település típusokon az árak változása jelentősen eltérhet az országos átlagtól. Az információvesztés elkerülése végett a granulásabb részindexekkel dolgoztam, az aggregált országos index helyett. Ezáltal a különböző településtípusokra és régiókra külön modellek állnak elő, ami elemzési szempontból is érdekes eredményekkel szolgálhat. Továbbá, így a régiók egyedi szórása sem tűnik el az aggregálás során, ami szinten fontos lehet, mivel az LGD növekvő a lakásárak volatilitásában. Így a részindexek használatából fakadó előnyök felülmúlják a rövidebb időszorból fakadó hátrányokat. Annak érdekében, hogy az LGD-k esetén országos átlagként is értelmezhető eredményeket kapjak, az MNB által publikált részindex súlyokat használok, az aggregált indexet pedig viszonyítási pontként használok.

CSÓDRÁTA

A lakásárhozam és a csőd gyakoriság közötti kapcsolat feltárásához használt csódráta idősort 5 magyar bank lakáscélú jelzáloghitel adatainak felhasználásával készítettem. A lefedett időszak 2004-től 2017-ig tart, így egy teljes hitelciklust tartalmaz. Egységes csőd definíció alapján akkor vált nemteljesítővé egy hitel, ha a huzamosabb ideig 90 napon túli késedelembe esett, vagy ha a késedelem hossza meghaladta a 365 napot. A csőd definícióban megkövetelt többszöri 90 napos késedelemből adódóan alacsonyabb a valószínűsége egy, így nemteljesítőnek ítélt hitel esetén, hogy újra teljesítővé váljon, mint az elterjedt egyszeri 90 napos csőd fogalom esetén. A fedezet likvidálása vagy a hitel eladása a hosszabb késedelemben lévő adósok esetén releváns, így ez a szigorúbbnak mondható csőd definíció jól illeszkedik a modellhez.

HFM ELOSZLÁS

A portfólió szinten számított LGD értékek meghatározásához szükséges HFM eloszlások előállításához az MNB 2017 decemberi Makroprudenciális, valamint a 2020. májusi és 2021. júniusi Pénzügyi stabilitási jelentésében publikált Magyarországra jellemző eloszlásokat használtam. Az eloszlások a tárgyév előtti kettő évben újonnan kihelyezett jelzáloghitelek HFM értékeiből állnak elő. Az így összeállított eloszlás-idősor is kettő éves frekvenciájú.

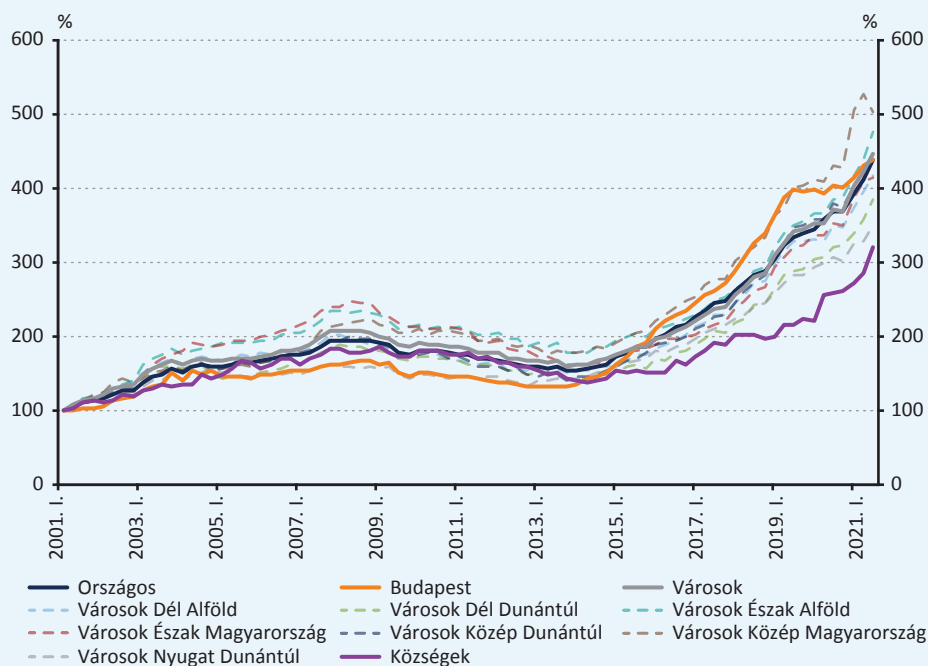
5. Eredmények

5.1. LAKÁSÁRINDEXEKRE ILLESZTETT EXPONENCIÁLIS ORNSTEIN-UHLENBECK FOLYAMAT

Az elemzés által lefedett, 2001Q1 és a 2021Q3 közötti (aggregált és granuláris) lakásárindexek alakulását az 1. ábra mutatja. Az ábrán látható, hogy a lakóingatlanok nominális árai 2001 és 2008 között növekedtek, majd az amerikai jelzáloghitel-piacról indult gazdasági válságot követően egészen 2013-2014-ig csökkentek országszerte. Az ezt követő időszakban egészen a vizsgált időszak végéig erős növekedés határozta meg az ingatlanárakat, pedig az időszak magában foglalja a 2020 eléjén kirobbant covid válságot is. Az ábráról leolvasható, hogy az ország különböző régióiban az ingatlanárak hasonlóan mozognak egy-egy időszak alatt.

A kvantitatív elemzés alapja a lakásárindex logaritmus, az adatok jobb megértése miatt azonban érdemes a loglakásárak különbségét, a loghozamokat is vizsgálni. Az 1. táblázat az MNB lakásárindex segítségével képzett negyedéves logaritmikus lakásárhozamok leíró statisztikáit tartalmazza. A legalacsonyabb átlagos loghozammal a községek ingatlanárai rendelkeztek, az időszakban bőven lemaradva a többi indextől. A legmagasabb átlagos növekedéssel a közép-magyarországi, észak-alföldi és közép-dunántúli városok rendelkeztek, őket követte a budapesti index. A loghozamok szórása a községek esetén volt a legmagasabb, így a legkisebb hozamhoz a szórás alapján a legnagyobb kockázat társult ezeken a településeken. Erre az alulteljesítésre a két évtized urbanizációs folyamatai lehetnek a magyarázat. A közép-magyarországi index esetén a magas hozamhoz magasabb szórás is társul, a községek után a legnagyobb. Ez a jelenség részben a 2021Q1-es loghozamnak köszönhető, aminek értéke kiugróan magas, 20% körüli, ez egyben az egész minta legmagasabb hozama is. A városok aggregált indexének alacsony szórása mutatja, miért érdemes a részindexek szintjére lemenni, hogy az ingatlanárak bizonytalanságából minél kevesebb vesszen el a modellezés során.

1. ábra
MNB lakásárindex alakulása



Az ábrán a negyedéves gyakoriságú, nominális MNB régiós lakásárindexek alakulása látható 2001 Q1 és 2021 Q3 között.

1. táblázat**MNB lakásárindexekből képzett negyedéves loghozamok leíró statisztikái**

	Átlag	Szórás	Min	Max	Medián
Országos	1,81	2,71	-4,94	8,00	1,73
Budapest	1,81	3,51	-8,92	11,86	1,74
Városok	1,82	2,96	-4,45	8,50	1,87
Városok Dél Alföld	1,74	3,35	-6,73	8,37	1,80
Városok Dél Dunántúl	1,65	3,57	-9,67	8,93	1,35
Városok Észak Alföld	1,91	3,36	-6,49	13,03	1,87
Városok Észak Magyarország	1,74	3,46	-7,20	10,56	1,65
Városok Közép Dunántúl	1,83	3,37	-6,80	8,01	2,15
Városok Közép Magyarország	1,97	3,70	-4,91	16,42	2,10
Városok Nyugat Dunántúl	1,53	3,07	-6,83	7,20	1,79
Községek	1,42	4,22	-5,37	14,78	1,03

A minta a 2001 Q1 és 2021 Q3 közötti időszakot fedi le. A loghozamok százalékos formátumban jelennek meg.

5.1.1. A trendmodell eredményei

A Módszertan fejezet alapján, a logaritmizált lakásárakra illesztett trend meghatározása egy egyszerű lineáris modell segítségével történt. A paraméter kalibrálás során, a trendszűréshez használt lineáris modellben a függőváltozó tehát a loglakásár, a magyarázó változó pedig az idő (években mérve) a konstans mellett, lásd 18. egyenlet. Az így meghatározott trend modellezési szempontból a lakásárak determinisztikus, az eltérések trendtől pedig a sztochasztikus részének foghatók fel. Az egyes régiós indexek esetén a regressziók eredményei a 2. táblázatban találhatóak.

A regressziós együtthatók egyértelműen szignifikánsnak bizonyultak (1%-os szinten is) minden régió esetén, azaz az egyszerű modell szerint a nominális ingatlanárak trendszerűen növekedtek a vizsgált időszak alatt országszerte. A trendmodellek eredményei összhangban vannak a részindexek átlagos loghozamainál megfigyelt területi heterogenitással, és a területek egymáshoz viszonyított különbségeivel.

2. táblázat**A lineáris trendmodell eredményei**

	Becsült érték		Standard hiba		t statisztika		R ²
	α	β	α	β	α	β	
Országos	4,768	0,045	0,039	0,003	123,469	14,203	0,713
Budapest	4,587	0,057	0,049	0,004	93,468	14,025	0,708
Városok	4,833	0,042	0,039	0,003	123,086	13,046	0,678
Városok Dél Alföld	4,832	0,039	0,042	0,003	116,294	11,219	0,608
Városok Dél Dunántúl	4,789	0,036	0,039	0,003	123,406	11,195	0,607
Városok Észak Alföld	4,933	0,041	0,039	0,003	125,411	12,524	0,659
Városok Észak Magyarország	4,964	0,034	0,046	0,004	108,194	8,836	0,491
Városok Közép Dunántúl	4,768	0,043	0,045	0,004	105,786	11,619	0,625
Városok Közép Magyarország	4,789	0,053	0,038	0,003	126,004	16,939	0,780
Városok Nyugat Dunántúl	4,707	0,039	0,035	0,003	135,770	13,650	0,697
Községek	4,816	0,028	0,032	0,003	148,291	10,496	0,576

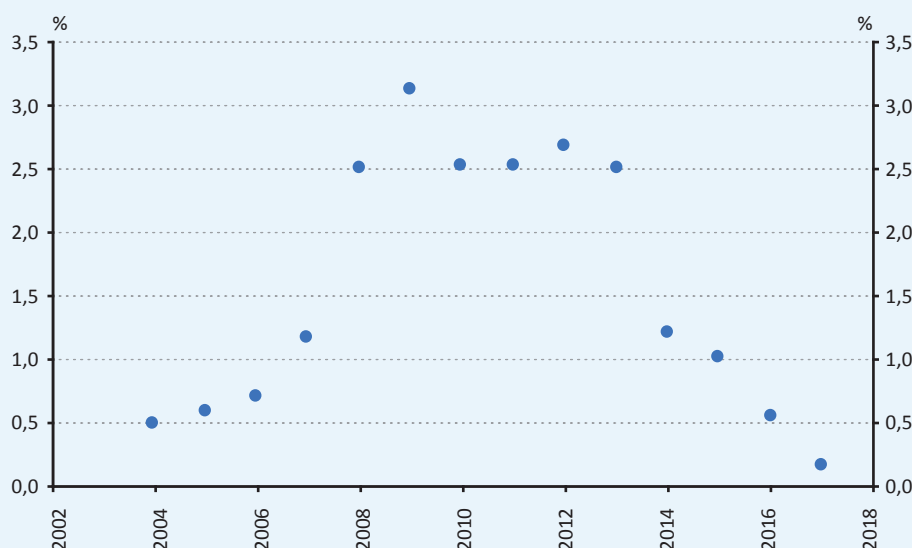
A régiós lakásárindexek logaritmusán becsült, lineáris trendmodell eredményei láthatók a táblázatban. A konstans és az eltelt évek együtthatói, illetve ezek standard hibái és t-statisztikái. Az utolsó oszlop a trend modellek R² mutatóit tartalmazza.

5.1.2. A fedezet várható hozama

A lakásár loghozamok, illetve a csődráták együtt mozgásából fakadó, a fedezetekre vonatkozó várható hozam meghatározásának menetét a Módszertan fejezet tartalmazza. A idősor éves frekvenciájú, így éves loghozamokat használtam a modellezéshez. A csődráták időszora a 3. ábrán látható, a ráták átlagos értéke a vizsgált időszakban 1,54% volt. Az ábráról leolvasható, hogy mind a lakásárindex, mind a csődráták a 2008-as év folyamán indultak romlásnak és 2013-14 után változtak kedvező irányba. Így kvalitatívan a két mutató között kapcsolat fedezhető fel. A kapcsolat statisztikailag is erős, a Pearson korreláció értéke $-0,86$. Az együttmozgás ellentétes irányú, ami a közgazdasági logikával megegyezik. Okozati összefüggés természetesen nem megállapítható, de ez a modellezés szempontjából nem probléma, egy súlyozott átlag meghatározása a cél.

A súlyozott átlag számítást elvégezve (23. egyenlet) adódik, hogy a fedezetek várható hozamának éves értéke $-0,16\%$. Azaz átlagban nulla közeli növekedési ráták lesznek jellemzőek a fedezetek értékére a különböző régiókban, szemben a trend modellekben látott 4% körüli rátákkal.

2. ábra
Lakáscélú jelzáloghitelek csőd rátájának alakulása

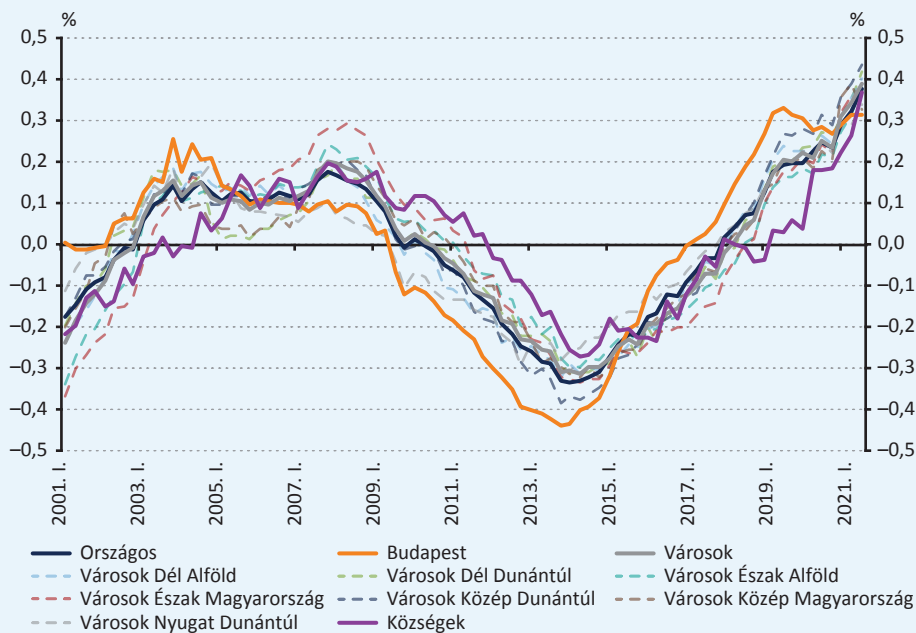


A ráták egységes default definíció szerint lettek meghatározva 2004 és 2017 között, 5 magyar bank adatai alapján.

5.1.3. Trendtől szűrt modell eredményei

A log lakásárindex trenddel igazított („detrended”) mértékét úgy kaphatjuk, az adott időszaki log lakásárindexből kivonjuk az időszakra vonatkozó, trendmodell alapján becsült értéket. Az így kapott trendtől szűrt idősor a nulla körül oszcillál, ahogy a 2. ábrán is látható. Kiolvashatóak továbbá, a már a lakásárindexnél leírt lakáspiaci folyamatok hullámszerű szakaszai. A transzformált idősből az is látszik, hogy a 2004-2008 között a lakáspiaci konjunktúra mértékeként felfogható, trendtől vett eltérés hosszan stagnált. Ezzel szemben a 2015-ben kezdődött ingatlanpiaci ciklus esetén ez a stagnálás még nem figyelhető meg. Annak ellenére sem, hogy a trendtől vett eltérés már jelentősen meghaladja a 2008-as értékeket minden régió esetén.

3. ábra
Trendtől szűrt logaritmizált lakásárindexek alakulása



A trendtől szűrt érték a log lakásárindex és a trendmodell alapján becsült érték különbsége. Az ábrán a 2001 Q1 és 2021 Q3 közötti időszak látható.

A trendtől szűrt idősorok segítségével, a Módszertan fejezetben vázolt becslési eljárással határoztam meg a trendhez visszahúzó κ , és az index volatilitását jellemző σ^{piac} paramétereket. Az autoregresszív modellek eredményeit – ami alapján a κ és σ^{piac} meghatározásra kerültek a 21. és 22. egyenlet alapján – az Melléklet tartalmazza (8.6.). A becsült értékeket, egy éves időegységgel a 3. táblázat tartalmazza. A táblázatban szembevetendő, hogy például az országos, azaz aggregált lakásárindex esetén a trendhez visszahúzás becsült paramétere nulla közeli és negatív. A nullához közeli kifejezetten közeli értékek ráadásul a községek és egy-két régió városainak indexén kívül minden részindexre igaz. Ez azt mutatja, hogy a magyar nominális ingatlanárakra nem jellemző erős trendhez visszahúzás, legalábbis a vizsgált időszak alatt biztosan nem volt jellemző. Ez az eredmény konzisztens Berki és Szendrei (2017) eredményével, miszerint a lakásár perzisztens. A nemzetközi indexeken megfigyelt jelenségekkel ellentétes ez a megállapítás. Fabozzi et al. (2012) az Egyesült Királyság lakásárindexére 0,11 mértékű, Pelizza et al. (2020) olasz régiós indexekre 0,06 és 0,15 közötti κ paramétereket becsült. Egy lehetséges magyarázat a magyar lakáspiac sajátosságán kívül, a minta időszak hossza és ciklikus jellege. A vizsgálat által lefedett időszak egyrészt nem hosszú, ráadásul amellelt, hogy lefed egy teljes ciklust, egy másik megkezdett ciklusnak csak a felívelő szakaszát tartalmazza. Feltételezhető, hogy amennyiben már négy-öt teljes ingatlanpiaci ciklust lefedne a modell, már kevésbé lenne érzékeny erre a felívelő szakaszra.

Ezzel együtt, két ok miatt ezekkel a becsült paraméterekkel dolgoztam tovább. Egyrészt, modellezési szempontból a nulla körüli κ^{index} értékek esetén az OU folyamat határértékben tart egy egyszerű Brown-mozgáshoz (drifttel), ami így az általános modell speciális esetének tekinthető. Másrészt, az LGD modellezés szempontjából, a kisebb κ^{index} értékek magasabb szórást eredményeznek, ami így valamivel konzervatívabb LGD rátákat eredményez, ami így prudens becslésnek tekinthető.

3. táblázat		
Ornstein-Uhlenbeck folyamatok becsült paraméterei		
	κ^{index}	σ^{piac}
Országos	-0,042	0,054
Budapest	0,000	0,070
Városok	-0,016	0,059
Városok Dél Alföld	-0,007	0,067
Városok Dél Dunántúl	-0,027	0,071
Városok Észak Alföld	0,050	0,067
Városok Észak Magyarország	0,062	0,070
Városok Közép Dunántúl	-0,041	0,067
Városok Közép Magyarország	0,040	0,074
Városok Nyugat Dunántúl	-0,027	0,061
Községek	0,072	0,085

A becslés a régiós trendtől szűrt logaritmizált lakásárindexeken zajlott, a paraméterek évesítettek.

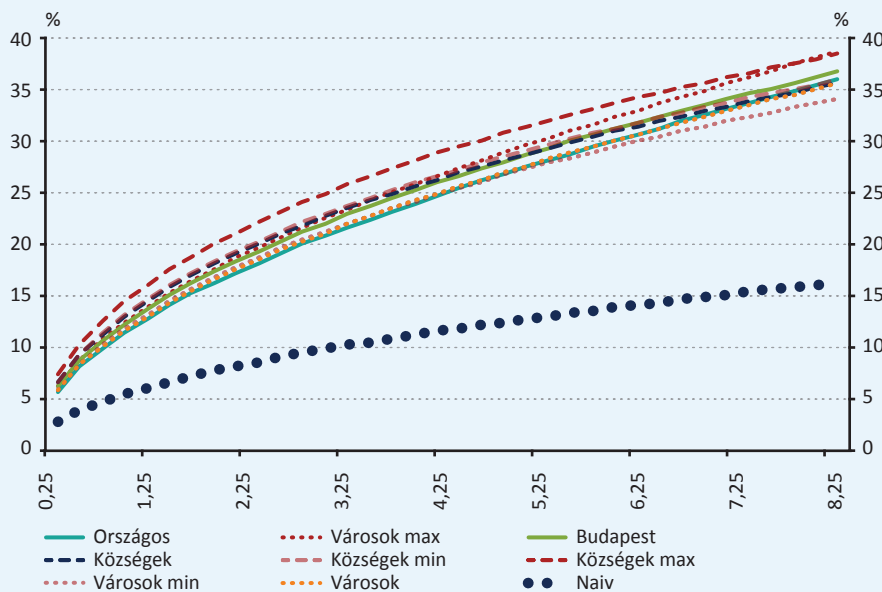
A modell feltevése szerint a reziduumok normális eloszlást követnek – hiszen a Brown-mozgás növekményeként állnak elő. A reziduumok normalitása, tesztelhető a Jarque-Bera teszt segítségével. A tesztek eredményei azt mutatják, hogy a reziduumok normalitásának hipotézisét nem lehet elutasítani 5 százalékos szinten, csak egy részindex a közép-magyarországi városok esetén. Ez esetben is a már említett 2021Q1-es, negyedév outlier értéke okozza az alacsony p értéket. Ennek a megfigyelésnek az eltávolítása után, erre a részindexre is el lehet fogadni a normalitás hipotézisét. (lásd 8.7 Melléklet)

5.1.4. Egyedi ingatlanárak volatilitása

Az indexekre vonatkozó becsült volatilitás és trendhez visszahúzás paraméterek, valamint az egyedi szórás segítségével, előállítható egyedi ingatlanok kumulált loghozamának volatilitása a feltételes variancia egyenlet (26. egyenlet) alapján. Ezek minden régió és településpár esetén eltérhetnek azok eltérő kockázati profilja miatt, amik a fenti paraméterekben tükröződnek. A község részindexek esetén a volatilitás paraméter szintetikusán állt elő a Módszertan fejezetben részletezett módon.

Az egyedi ingatlanok kumulált loghozamának volatilitása, amellet, hogy az LGD modell egyik fontos összetevője, az ingatlanulajdonosok számára is fontos mutatószám lehet befektetésük kockázatának mérésére. Az ingatlanlankitettségek jellemzője, hogy a befektetők kis számú – a legnagyobb részük egy darab – eszközt tart, így annak az egyedi kockázatának is ki vannak téve. A 4. ábrán az eltelt évek számának függvényében látható a kumulált hozam szórása, továbbá az országos index volatilitásából számított, egyszerű becslés ugyanerre, amely nem veszi figyelembe az idioszinkratikus szórást. Látható, hogy a „naiv” becslés jelentősen alulbecsüli a befektetés kockázatát, amennyiben az alkalmazott egyedi szórás nagyságrendjét elfogadjuk. Abból adódóan, hogy a községekhez tartozó régiós indexek becsült volatilitás paramétere nagyobb, így az első pár évben magasabb kockázat is társul ezekhez az indexekhez. Feltűnő azonban, hogy idővel, nagyjából a 6-7. évtől kezdve más indexek volatilitása már magasabb, mint a falvakra modellezett szám. Ez a községek relatíve erős trendhez visszahúzás paraméterének köszönhető, ami hosszabb távon csökkenti a kockázatot. A részletes régiós és településtípus bontású volatilitások az Mellékletben találhatóak, a 6. táblázatban.

4. ábra
Egyedi ingatlanbefektetések kumulált loghozama



Az ábrán különböző lokációkon elhelyezkedő, egyedi ingatlanbefektetések kumulált loghozamának szórása látható, a befektetési időhorizont függvényében.

5.2. A KAPOTT LGD ÉRTÉKEK RÉGIÓS BONTÁSBAN

A becült lakáspiaci folyamatok paramétereinek és a Módszertan fejezetben taglalt további hitelkockázati szempontból releváns paraméterek segítségével összeállítható az LGD modell a 17. egyenlet alapján. A likvidáció pillanatáig hátralévő várható hozam, illetve volatilitás is meghatározható az 25 és 26. egyenlet alapján, régió-település típus bontásban. A várható hozam (μ_v) -7,5% és 4%, a volatilitás (σ_v) 23,4% és 27,3% között mozgott régiótól függően, lásd 8.9. Melléklet. A 17. egyenlet minden tagja meghatározásra került minden régió esetén, kivéve a $\frac{C_t}{EAD}$ tagot, ami egyenlő a jelzáloghitelek HFM értékével. A HFM az iparágban széleskörben használt kockázati mutató, így ennek függvényében határoztam meg az LGD rátákat.

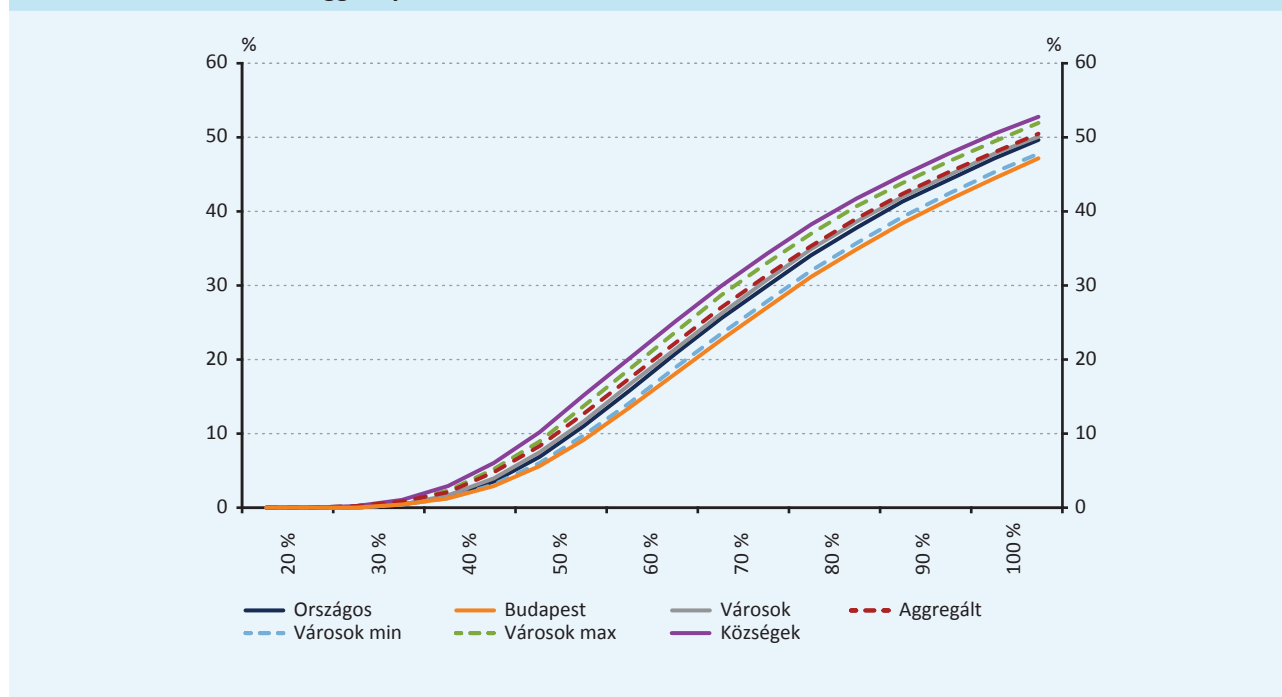
Az 5. ábrán a régióként előállt LGD ráták láthatók a HFM függvényében ábrázolva, fekete pontokkal a régiós modellek súlyozott átlagaként előálló országos LGD. A súlyok a régiók ingatlan tranzakcióinak számával arányosak. Így, feltételezve, hogy a hitelfolyósítások szintén a tranzakciók számával arányosak, adódik, hogy az összesúlyozással készült mutató értelmezhető egy bank országosan reprezentatív hiteléhez tartozó LGD-nek. A várakozásokkal összhangban a súlyozott régiós LGD minden HFM érték esetén magasabb az országos index alapján számítottnál, az eltérés maximuma 1,6 százalékpont. Az összesúlyozott LGD függvény egy MSE optimalizáció alapján pontosan közelíthető, amennyiben $\mu_v = -2,9\%$ és $\sigma_v = 25,1\%$ értékeket helyettesítünk a 17. egyenletbe. Így ezeknek a zárt formulás megoldásoknak az előnye, hogy az alacsony számítási igény az összesúlyozott modellre is fenntartható.

Nemteljesítés esetén a várható veszteségráta a községek esetén a legmagasabb, a legkisebb Budapest esetén és a közép-magyarországi városok esetén. Ez arra utal, hogy a legnagyobb hatása a várható hozamnak volt az LGD-re, szemben a volatilitással, illetve az azt befolyásoló visszahúzó paraméterrel. Az HFM 80%-os értéke mellett az LGD az észak-alföldi községekre 38%, Budapestre 31%, így a két régió között az eltérés 7 százalékpont körüli. A jelenleg hatályos adósságfék szabályok szempontjából is releváns lehet a 80%-os HFM esetén kapott országos átlagos LGD érték, ennek nagysága 35%. A részletes régiós és településtípus bontású LGD ráták az Mellékletben találhatóak, a 8. táblázatban.

Az 5. ábra jól mutatja az LGD nemlineáris természetét, alacsonyabb HFM értékek esetén a függvény meredeksége alacsony, azonban 50% feletti HFM mutatók esetén a meredekség megnő. Ennek következtében egy alacsony hitelfedezeti mutatóval rendelkező adóshoz képest egy magas mutatóval rendelkező sokszorosan magasabb veszteség rátát jelent a banknak

nemteljesítés esetén. Nagyon magas HFM értékek esetén a meredekség lassan csökkenni kezd, azonban ez a jelenség az adósságfék-szabályok miatt már kevésbé releváns. Az ábráról leolvasható, hogy a 80%-os adósságfék-limit az LGD függvények meredek szakaszán található, egy kisebb változtatás is relatíve jelentős LGD hatással járna.

5. ábra
LGD ráták a kezdeti HFM függvényében

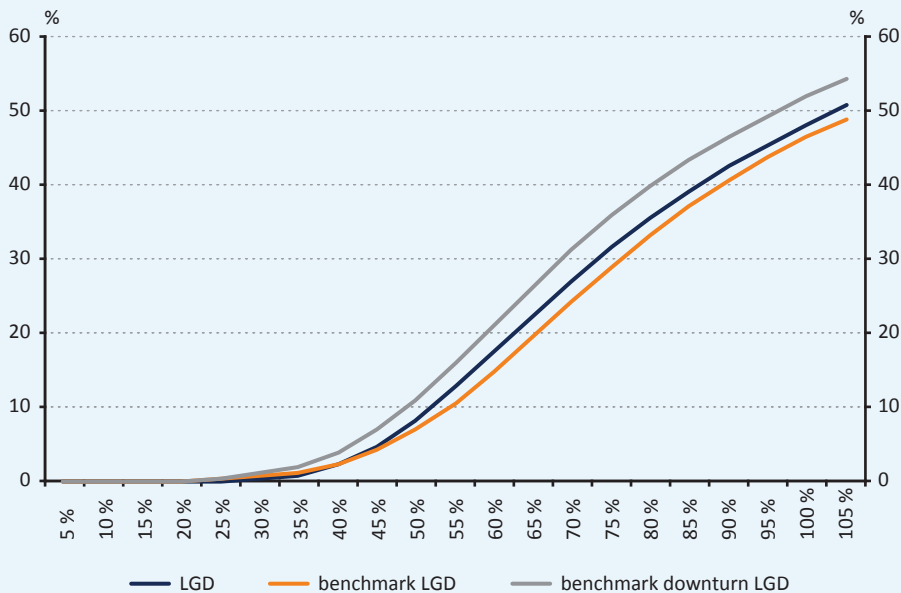


5.2.1. Összevetés egy benchmark modellel

A kapott eredmények realitásának vizsgálata végett érdemes összevetni őket egy „challenger” modell számaival. A választott benchmark modell az ECB által 2018-ban végzett, Asset Quality Review során alkalmazott lakossági jelzáloghitel LGL (Loss Given Loss) modell (ECB (2018)). A modell szintén a HFM függvényében határozza meg a nemteljesítési veszteséget egy folytonos függvény segítségével. A kezdeti HFM-t a modell az ingatlanárak változásával és a költséghányaddal módosítja, így állítja elő a korrigált HFM-t. Ezután a fedezetek eladására alkalmazott haircut-ok és az eladások volatilitását is figyelembe vevő folytonos szigmoid függvény segítségével rendeli hozzá a korrigált HFM-hoz az LGD rátát. A modell alkalmazásához az ingatlanárak változását, a fedezetek eladási hányadát és szórását, a csődig és az eladásig eltelt időt, illetve a megfelelő diszkont rátát kell meghatározni. Ezekre az értékekre javaslatot is nyújt a kézikönyv, egy prudens „downturn” azaz stresszidőszaki LGD függvény meghatározásához. Ebben az esetben az ingatlanárak 10%-os esése teszi a függvényt stresszidőszakivá.

A 6. ábrán a súlyozott országos LGD függvényt vettem össze a downturn benchmark modell, illetve egy ingatlan-áresés nélkül képzett, így nem downturn benchmark függvény eredményeivel. Mindkét benchmark modell esetén a diszkont rátát 10%-ban határoztam meg, hasonlóan a sztochasztikus modellhez. Az ábráról leolvasható, hogy 40% feletti HFM esetén súlyozott országos LGD függvény a downturn benchmark modellhez képest kisebb, de a nem downturn függvényénél nagyobb. Alapvetően elmondható, hogy a két nem downturn LGD függvény hasonlóan alakul.

6. ábra
Az aggregált országos és a benchmark modellek LGD rátái

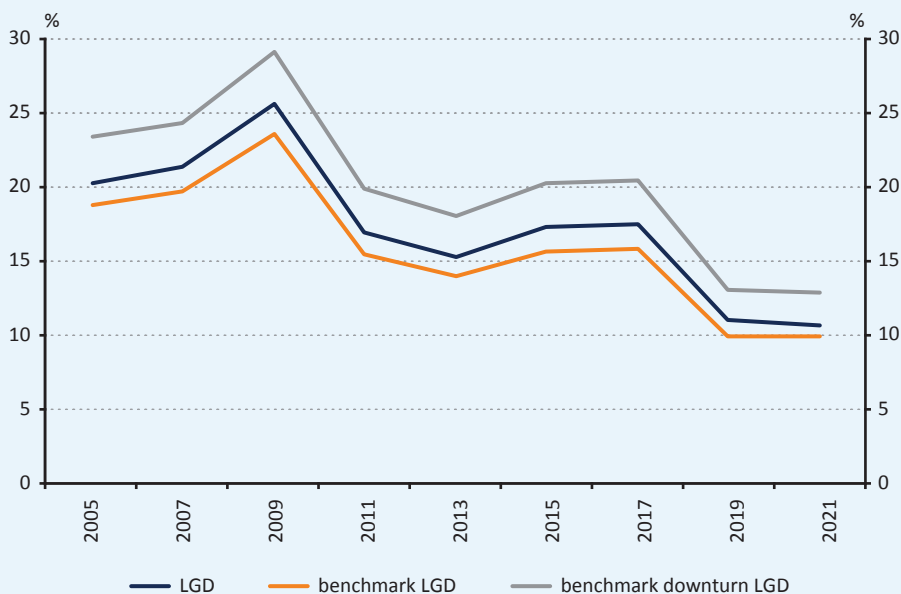


A kezdeti HFM függvényében.

5.2.2. Magyar lakossági jelzáloghitel-portfólió

Az összeállított országos LGD modell segítségével becslés adható egy hitelportfólió várható LGD rátájára is, ha annak HFM eloszlása ismert. A portfólióra vonatkozó becslés, akárcsak az LGD függvény, egy várható rátára vonatkozik, az adott időszak makrogazdasági kilátásait nem veszi figyelembe. Ilyen értelemben inkább a hitelportfólió minőségét tükrözi, az LGD-re leginkább ható HFM eloszlásból leszűrve azt. Ez alapján through-the-cycle szemléletű becslésnek tekinthető. Point-in-time jellegű index az ingatlanárak előrejelzésének beépítésével lehetne előállítani. Az LGD függvények nemlinearitásából fakadóan a portfólió szintű várható LGD rátákat főképp a magas HFM értékkel rendelkező kihelyezések aránya határozza meg.

7. ábra
Újonnan kihelyezett jelzáloghitelek várható LGD rátái a HFM eloszlás alapján



A HFM eloszlások két év során Magyarországon kihelyezett hitelekre vonatkoznak és volumen alapúak. Az adatok 2005 és 2021 között állnak rendelkezésre.

A portfólió várható LGD-jét leíró idősor így mellett, hogy a hitelkockázat egyik fontos komponensét ragadja meg, egy kockázati és üzleti szempontból releváns mutatóban összegzi az újonnan kihelyezett magyar jelzáloghitelek HFM eloszlásának egészét. Ebből adódóan LGD kockázati indexként is alkalmazható. A 7. ábrán az index alakulása látható 2005 és 2021 között. Az ábráról leolvasható, hogy a 2009-et megelőző két év során magas szintre emelkedett az újonnan kihelyezett hitelek LGD kockázati profilja, elérve a 25%-os várható LGD értéket. A válság időszak alatt, a 2009-et követő időszakban feltehetően a bankok szigorú hitelezési feltételei miatt jelentősen javult ez a kockázati mutató. Az index 2017 után tovább csökkent, feltehetőleg erre a CSOK és Babaváró kormányzati programok is hathattak, amik sok esetben egészíthették ki a piaci lakáscélú hiteleket. A benchmark modellek esetén is kirajzolódik ez a folyamat. A 2021-et megelőző időszakban folyósított hitelekre a portfólióminőség alapján a modell 10% körüli várható LGD becslést ad.

6. Összefoglaló

A tanulmányban vizsgált modell, a Frontczak és Rostek (2015) alapján, egy sztochasztikusan változó fedezeti érték melletti várható LGD modell kalibrálása a magyar lakossági jelzáloghitel piacra. A magyar specifikus modell létrehozásához az MNB lakásárindexekre egy sztochasztikus folyamatot, az exponenciális Ornstein-Uhlenbeck folyamatot illesztettem. Ezt a minél kevesebb információvesztés érdekében a régió és a település szerinti bontásban közölt indexek szintjén végeztem. Ezenfelül a modellben figyelembe vettem a hitel bedőléséből adódó többletinformációt a fedezetérték várható hozamára, illetve az egyedi házak árváltozásának bizonytalanságát is. A további nemteljesítéssel kapcsolatos paramétereket a nemzetközi szakirodalommal összhangban állapítottam meg. Robusztussági vizsgálatként egy benchmark modell eredményeivel hasonlítottam össze az épített modell LGD értékeit.

A magyar lakásárindexek sztochasztikus folyamatainak illesztése során több új eredményt is kaptam. A régiós lakásárindexek heterogén képet mutatnak, mind az árak növekedési trendjét, mind a hozamok szórását vizsgálva ez látható. A főváros, a közép-magyarországi és a közép-dunántúli városok esetén az árak növekedési trendje magas volt, míg a községek indexe esetén alacsony. A községek indexére magas volatilitás volt jellemző. A logaritmizált lakásárindexekről elmondható, hogy az OU modellben a trendhez visszahúzást mérő kappá paraméter értéke szinte minden esetben nulla közeli, azaz a trendtől huzamosabb ideig el tudnak szakadni az ingatlanárak. Más országok esetén ez a visszahúzás jelentős szokott lenni, Magyarországon a trendhez húzás egyedül a községek indexe esetén volt jelen, esetükben is gyenge határról lehet beszámolni. A trendtől vett eltérés 2021 Q3 esetén a legmagasabb az idősorban, ami a lakáspiaci ciklus jelenlegi állapotáról hordozhat információt. A lakásárindexre illesztett OU modell és az egyedi szórás kumulálása alapján adódó szórás mértéke jelentősen meghaladja a csak lakásárindexre illesztett naiv modell volatilitását a befektetési időhorizont minden pontján. Eredményeim szerint az ingatlanpiac és a bedőlések erős korrelációja miatt, a nemteljesítő fedezetek értékének várható hozama alacsony. Ez a feltételes várható hozam évente maximum 1% és legrosszabb esetben -2% körül alakulhat régiótól függően a modellezés szerint.

A kapott LGD modellek segítségével azonosíthatók a nemteljesítéskori veszteség ráták szempontjából kockázatosabb régiók és település típusok. A modell szerint az LGD ráták a községek esetén a legmagasabbak, Budapest és a közép-magyarországi városok esetén a legalacsonyabbak adott hitelfedezettségi szint mellett. Ez a differencia akár 7 százalékpontos is lehet. A régiós bontásban készült modellek aggregálásával készített országos LGD modell és az országos lakásárindex alapján számított LGD modell különbsége 1-1,5 százalékpont körül alakul. Az implementált sztochasztikus modell eredményei szerint az LGD függvény erősen nemlineáris a folyósítási HFM függvényében. Az országos modell alapján készített várható LGD becslés hitelportfóliókra is elkészíthető, így through-the-cycle szemléletű LGD kockázati indexként is használható. Ebből leolvasható, hogy a magas hitelfedezeti mutatójú hitelezés visszaszorulása miatt, az újonnan kihelyezett jelzáloghitelek LGD profilja jelentősen javult Magyarországon 2009 óta.

Az eredmények relevánsak lehetnek hitelintézetek számára jelzáloghitel kihelyezési döntéseik, valamint kockázatkezelési folyamataik során. Emellett alátámaszthatja a kisebb települések esetén bevett szokást, miszerint szigorúbb hitelbiztosítási értékeket határoznak meg a bankok. Hasonlóképp, a kisebb települések magasabb várható LGD értékei a statisztikai alapú értékbecslés alkalmazhatóságának településméret szerint meghatározott feltételeit is alátámasztja. Az LGD kockázati index a hitelezési folyamatokról és azok kockázatáról informálhatja az elemzőket. A lakáspiaci folyamatok eredményei pedig ingatlan befektetők számára hordozhatnak információt.

7. Referenciák

- Acharya, V.V., Bharath, S.T., Srinivasan, A. (2007). Does industry-wide distress affect defaulted firms? Evidence from creditor recoveries, *Journal of Financial Economics*. 85 (3), 787–821.
- Ali, A., Daly, K. (2010). Macroeconomic determinants of credit risk: Recent evidence from a cross country study, *International Review of Financial Analysis*, 19 (3)
- Altman, E.I., Brady, B., Resti, A., Sironi, A., (2005). The Link between Default and Recovery Rates: Theory, Empirical Evidence and Implications. *The Journal of Business*. 78 (6), 2203–2228.
- Banai, Á., Hosszú, Zs., Körmendi, Gy., Sóvágó, S., Szegedi, R. (2013). Stressztesztek a Magyar Nemzeti Bank gyakorlatában. *MNB-tanulmányok* 109.
- Banai, Á., Vágó, N., Winkler, S. (2017). Az MNB lakásárindex módszertana. *MNB-tanulmányok* 127.
- Bellotti, T., Crook, J. (2012). Loss given default models incorporating macroeconomic variables for credit cards. *International Journal of Forecasting*, 28(1), 171–182. doi:10.1016/j.ijforecast.2010.08
- Berki, T., Szendrei, T. (2017). The cyclical position of housing prices – a VECM approach for Hungary *MNB Occasional Papers* 12
- Calabrese, R. (2014). Downturn Loss Given Default: Mixture distribution estimation. *European Journal of Operational Research*, 237(1), 271–277. doi:10.1016/j.ejor.2014.01.043
- Campbell, J. Y., Giglio, S., Pathak, P. (2011). Forced Sales and House Prices. *American Economic Review*, 101 (5): 2108-31.
- Chaiyapo, N., Phewchean, N. (2017). An application of Ornstein-Uhlenbeck process to commodity pricing in Thailand, *Advances in Difference Equations*
- Chalupka, R., Kopecsni, J. (2009). Modelling bank loan LGD of corporate and SME segments: A case study. *Czech Journal of Economics and Finance*, 59
- European Banking Authority (2017). Guidelines on PD estimation, LGD estimation and treatment of defaulted assets
- European Central Bank (2018). Asset Quality Review Phase 2 Manual
- Fabozzi, F. J., Shiller, R. J., Tunaru, R. S., (2012). A Pricing Framework for Real Estate Derivatives. *European Financial Management*, 18 (5), 762–789
- Frontczak, R., Rostek, S. (2015). Modeling loss given default with stochastic collateral, *Economic Modelling*, 44, 162-170
- Frye, J. (2000). Collateral damage. *Risk*, April.
- Giacoletti, M. (2021). Idiosyncratic Risk in Housing Markets, *The Review of Financial Studies*, 34, (8), 3695–3741
- Gupton, G. M., Stein, R. M. (2002). LossCalc: Model For Predicting Loss Given Default (LGD), Moody's Investors Service
- Holló, D. (2009). Risk developments on the retail mortgage loan market. *MNB Bulletin* October 2009

- Jokivuolle, E., Peura, S. (2003). Incorporating Collateral Value Uncertainty in Loss Given Default Estimates and Loan-to-value Ratios. *European Financial Management*, 9(3), 299–314. doi:10.1111/1468-036x.00222
- Koopman, S. J., Kräussl, R., Lucas, A., Monteiro, A. B. (2009) Credit cycles and macro fundamentals, *Journal of Empirical Finance*, 16(1)
- Leow, M., Mues, C. (2012). Predicting loss given default (LGD) for residential mortgage loans: A two-stage model and empirical evidence for UK bank data, *International Journal of Forecasting*, 28(1)
- Miller, N. G., Pandher, G. (2008). Idiosyncratic Volatility and the Housing Market. *Journal of Housing Research*, 17(1), 13-32.
- Palmroos, P. (2016). Correlation between Probability of Default and Loss Given Default on Homogeneous and Heterogeneous Mortgage Loan Pools. Aalto University Working Paper
- Palmroos, P. (2016). Modeling the current loan-to-value structure of mortgage pools without loan-specific data. *Journal of Credit Risk*. 12(4) 1-15 10.21314/JCR.2016.214
- Pelizza, M., Schenk-Hoppé, K. R. (2020). Pricing Defaulted Italian Mortgages. *Journal of Risk and Financial Management*. 13(2)
- Qi, M., Yang, X. (2009). Loss given default of high loan-to-value residential mortgages, *Journal of Banking & Finance*, 33(5). 788-799
- Rünstler, G., Vlekke, M. (2018). Business, housing, and credit cycles. *Journal of Applied Econometrics*. 33(2). 212–226.
- Siemsen, T., Vilsmeier, J. (2017). A Stress Test Framework for the German Residential Mortgage Market: Methodology and Application. Bundesbank Discussion Paper No. 37/2017
- Szabó, A. V. (2022). Jelzáloghitelek hitelkockázati modellezése a Magyar Nemzeti Bank felügyeleti stressztesztjébe, *Hitelintézeti Szemle*, 21(1)
- Tajti, Zs. (2011). A lakossági jelzáloghitel LGD meghatározásának módszertani lehetőségei Magyarországon, PhD értekezés
- Winkler, S. (2021) Többszöri eladások módszerén alapuló lakásárindexek számítása magyar adatokon. *Statisztikai Szemle*, 99 (11)

8. Melléklet

8.1. VÁRHATÓ LGD EGYENLET LEVEZETÉSE

A Módszertan fejezetben található levezetés alapján a várható LGD a következő integrállal egyenlő:

$$E[LGDT_D] = \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(0, \frac{EAD - e^{-r(T_L - T_D)}(1 - k)C_{T_L}}{EAD}\right) \frac{1}{C_{T_L}\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln C_{T_L} - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}\right)^2\right] dC_{T_L}$$

A max függvény helyettesíthető az integrálás határainak változtatásával

$$0 < EAD - e^{-r(T_L - T_D)}(1 - k)C_{T_L} \Leftrightarrow C_{T_L} < \frac{EAD \cdot e^{r(T_L - T_D)}}{(1 - k)} = X$$

$$E[LGDT_D] = \int_{-\infty}^X \frac{EAD - e^{-r(T_L - T_D)}(1 - k)C_{T_L}}{EAD} \frac{1}{C_{T_L}\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln C_{T_L} - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}\right)^2\right] dC_{T_L}$$

ezután felhasználva a Riemann integrál linearitását adódik a következő:

$$E[LGDT_D] = \int_{-\infty}^X \frac{1}{C_{T_L}\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln C_{T_L} - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}\right)^2\right] dC_{T_L} - \frac{e^{-r(T_L - T_D)}(1 - k)}{EAD} \int_{-\infty}^X \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln C_{T_L} - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}\right)^2\right] dC_{T_L}$$

vegyük észre, hogy az első integrál egyenlő a lognormális eloszlás eloszlásfüggvényével helyen. Felhasználva, hogy a lognormális eloszlás eloszlásfüggvénye kifejezhető a normális eloszlás függvényével adódik:

$$E[LGDT_D] = \Phi\left(\frac{\ln X - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}\right) - \frac{e^{-r(T_L - T_D)}(1 - k)}{EAD} \int_{-\infty}^X \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln C_{T_L} - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}\right)^2\right] dC_{T_L}$$

A következő helyettesítést alkalmazva jobb oldali integrálra, majd teljes négyzetté alakítva az integrál mögötti exponenciális függvény belsőjét, majd felhasználva, hogy az egyenlő a normális eloszlás eloszlásfüggvényével helyen tovább egyszerűsödik az egyenlet.

$$u = \frac{-(\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}$$

$$z_2 = \frac{\ln X - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln C_{T_L} - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}\right)^2\right] dC_{T_L} &= C_t \cdot \exp[\mu_Y] \int_{-\infty}^{\frac{z_1}{\sigma_Y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}u^2\right] \exp[\sigma_Y u] du \\
&= C_t \cdot \exp[\mu_Y] \int_{-\infty}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u - \sigma_Y)^2 + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right] du \\
&= C_t \cdot \exp\left[\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right] \int_{-\infty}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u - \sigma_Y)^2\right] du = C_t \cdot \exp\left[\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right] \Phi(z_2 - \sigma_Y)
\end{aligned}$$

Összerakva a kapottakat adódik a következő:

$$E[LGD_{T_D}] = \Phi\left(\frac{\ln X - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y}\right) - \frac{C_t}{EAD} e^{-r(T_L - T_D)} (1 - k) \cdot \exp\left[\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right] \Phi(z_2 - \sigma_Y)$$

Ez láthatóan ekvivalens a bizonyítandó állítással:

$$\begin{aligned}
\frac{\ln X - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y} &= -\frac{\ln \frac{C_t}{X} + \mu_Y}{\sigma_Y} = -d \\
-(d + \sigma_Y) &= \frac{\ln X - (\ln C_t + \mu_Y)}{\sigma_Y} - \sigma_Y = z_2 - \sigma_Y
\end{aligned}$$

8.2. AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT ORNSTEIN-UHLENBECK FOLYAMAT MEGOLDÁSA

Az átláthatóság érdekében az Y_t^{piac} változót a szakaszban Y_t -vel jelölöm. Bevezetve az X_t jelölést a trend és a folyamat t időponti eltérésére,

$$X_t = \varphi_t - Y_t$$

felírható az X_t sztochasztikus differenciál egyenlete Y_t és φ_t segítségével – felhasználva, hogy a φ_t függvény deriváltjának integráltja pont φ_t :

$$dX_t = d\varphi_t - dY_t = d\varphi_t - \left(\frac{d\varphi_t}{dt} + \kappa(\varphi_t - Y_t)\right) dt - \sigma dW_t$$

Egyszerű átalakítás után látható, hogy X_t egy Ornstein-Uhlenbeck folyamatot követ.

$$dX_t = -\kappa X_t dt - \sigma dW_t$$

Alkalmazva az Ito-lemmát a $f(X_t, t) = e^{-\kappa t} X_t$ függvényre, és az egyenlet két oldalát t és T között integrálva adódik:

$$X_T e^{-\kappa T} - X_t e^{-\kappa t} = - \int_t^T \sigma e^{-\kappa s} dW_s$$

Visszahelyettesítve X helyére Y és φ jelöléseket előáll az Y_t folyamat megoldása:

$$Y_T = \varphi_T - (\varphi_t - Y_t) e^{-\kappa(T-t)} + \sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} dW_s$$

8.3. AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT ORNSTEIN-UHLENBECK FOLYAMAT FELTÉTELES VÁRHATÓ ÉRTÉKE

A 7. egyenletet behelyettesítve a feltételes várható értékbe adódik,

$$E[Y_T|Y_t] = E \left[\varphi_T - (\varphi_t - Y_t)e^{-\kappa(T-t)} + \sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} dW_s \mid Y_t \right]$$

majd felhasználva a feltételes várható érték linearitását, valamint, hogy Y_t értéke már ismert a t időpontban:

$$E[Y_T|Y_t] = \varphi_T - (\varphi_t - Y_t)e^{-\kappa(T-t)} + E \left[\sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} dW_s \mid Y_t \right]$$

Az drift nélküli Ito-integrál várható értéke nulla, tehát a keresett összefüggés fennáll:

$$E[Y_T|Y_t] = \varphi_T - (\varphi_t - Y_t)e^{-\kappa(T-t)}$$

Az általánosított Ornstein-Uhlenbeck folyamat feltételes varianciája

A feltételes varianciára a következő összefüggés áll fenn,

$$\text{Var}[Y_T|Y_t] = E[Y_T^2|Y_t] - (E[Y_T|Y_t])^2$$

ahol Y_t helyére behelyettesíthető a 7. egyenletből ismert megoldás, valamint $E[Y_T|Y_t]$ helyére az imént meghatározott feltételes várható érték. Az Ito-integrált nem tartalmazó tagok ezután kiesnek az egyenlet jobb oldaláról.

$$\text{Var}[Y_T|Y_t] = E \left[\left(\varphi_T - (\varphi_t - Y_t)e^{-\kappa(T-t)} + \sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} dW_s \right)^2 \mid Y_t \right] - (\varphi_T - (\varphi_t - Y_t)e^{-\kappa(T-t)})^2$$

$$\text{Var}[Y_T|Y_t] = E \left[\sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} dW_s \cdot (\varphi_T - (\varphi_t - Y_t)e^{-\kappa(T-t)}) \mid Y_t \right] + E \left[\left(\sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} dW_s \right)^2 \mid Y_t \right]$$

Az Ito integrál várható értéke nulla, így ez a tag is kiesik. A négyzetes tag esetén használható az Ito izometria. A határozott Riemann integrál megoldásaképp pedig adódik a bizonyítandó egyenlőség.

$$\text{Var}[Y_T|Y_t] = \sigma \cdot E \left[\left(\int_t^T e^{-\kappa(T-s)} dW_s \right)^2 \right]$$

$$\text{Var}[Y_T|Y_t] = \sigma \cdot \int_t^T (e^{-\kappa(T-s)})^2 ds$$

$$\text{Var}[Y_T|Y_t] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)})$$

8.4. AZ IDIOSZINKRATIKUS FOLYAMAT MEGOLDÁSA ÉS VARIANCIÁJA

A 11. egyenlet alapján a következő egyenlőség áll fenn:

$$Y_T^{idio} - Y_t^{idio} = \int_t^T \sigma^{idio} dW_s^{idio} = \sigma^{idio} (W_T^{idio} - W_t^{idio})$$

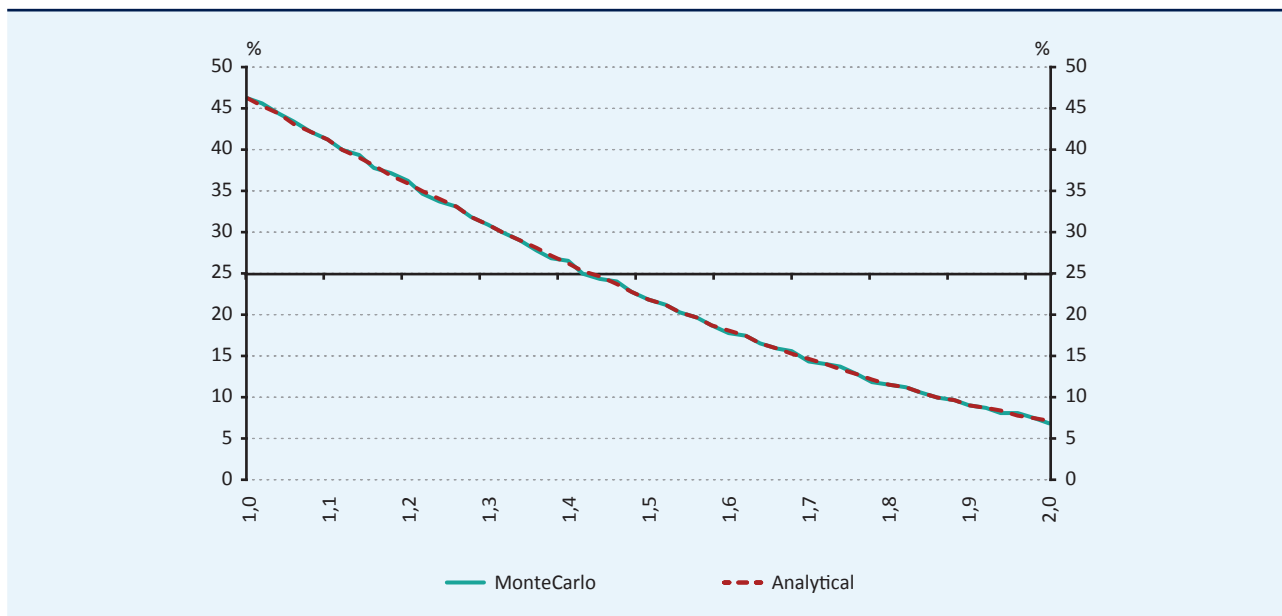
Ebből közvetlenül adódik a folyamat nulla várható értéke, és a feltételes varianciája is.

8.5. MONTE CARLO SZIMULÁCIÓK EREDMÉNYEI

A Monte Carlo szimulációk és az analitikus megoldás (17. egyenlet) segítségével számított várható LGD rátákat a kezdeti fedezet érték függvényében vettem össze. A használt paraméterek a tanulmányban is alkalmazott paraméterekre támaszkodnak:

$$T_D = 1 \text{ év}; T_L = 4; k = 30\%; r = 10\%; EAD = 1; \mu_Y = 0\%; \sigma_Y = 25\%$$

Az ábrán látható eredmények 10000 szimuláció segítségével álltak elő.



8.6. A TRENDTŐL SZÚRT LOGLAKÁSÁRINDEXEK REGRESSZIÓS EREDMÉNYEI

$$\tilde{Y}_{t+\Delta t} = \beta \cdot \tilde{Y}_t + \varepsilon_{t+\Delta t}$$

4. táblázat

A trendtől szűrt logaritmizált részindexek regresszióinak eredményei

Régió	β			R^2
	Becsült érték	Standard hiba	t-statisztika	
Országos	1,01	0,02	55,13	0,97
Budapest	1,00	0,02	55,74	0,97
Városok	1,00	0,02	50,81	0,97
Városok Dél Alföld	1,00	0,02	47,69	0,97
Városok Dél Dunántúl	1,01	0,02	41,94	0,96
Városok Észak Alföld	0,99	0,02	44,14	0,96
Városok Észak Magyarország	0,98	0,02	50,47	0,97
Városok Közép Dunántúl	1,01	0,02	52,13	0,97
Városok Közép Magyarország	0,99	0,02	39,83	0,95
Városok Nyugat Dunántúl	1,01	0,02	44,18	0,96
Községek	0,98	0,03	29,12	0,91

Az első oszlop a régiók nevét tartalmazza, majd sorban a régió regressziós egyenletének becsült β értékét, annak standard hibáját, valamint t-statisztikáját tartalmazza. Az utolsó oszlop a regresszió illeszkedését mérő R^2 mutatókat tartalmazza.

8.7. A TRENDTŐL SZÚRT LOGLAKÁSÁRINDEXEK REGRESSZIÓINAK REZIDUUMAINAK NORMALITÁS TESZTJE

5. táblázat

A részindexek reziduumainak Jarque-Bera normalitás tesztjeinek eredményei

Régió	Jarque-Bera teszt statisztika	p-érték
Országos	1,638	0,441
Budapest	1,928	0,381
Városok	0,786	0,675
Városok Dél Alföld	2,063	0,357
Városok Dél Dunántúl	0,454	0,797
Városok Észak Alföld	2,994	0,224
Városok Észak Magyarország	0,534	0,766
Városok Közép Dunántúl	2,910	0,233
Városok Közép Magyarország	16,313	0,000
Városok Nyugat Dunántúl	2,143	0,342
Községek	5,018	0,081

8.8. KUMULÁLT LOGHOZAMOK SZÓRÁSA AZ EGYES RÉGIÓK ESETÉN (SZÁZALÉK)

6. táblázat

A különböző lokációkon elhelyezkedő, egyedi ingatlan befektetések kumulált loghozamának szórása látható, a befektetési horizont függvényében

Év	Dél Alföld		Dél Dunántúl		Észak Alföld		Észak Magyarország		Közép Dunántúl		Közép Magyarország		Nyugat Dunántúl	
	V	K	V	K	V	K	V	K	V	K	V	K	V	K
1	12,1	13,7	12,3	14,1	12,0	13,7	12,1	13,9	12,1	13,6	12,4	14,4	11,8	13,1
2	17,1	19,0	17,5	19,5	16,8	19,1	16,9	19,3	17,2	19,0	17,4	20,0	16,7	18,3
3	20,9	22,9	21,6	23,6	20,4	23,0	20,5	23,3	21,3	22,9	21,1	24,0	20,5	22,1
4	24,2	26,1	25,0	26,8	23,4	26,2	23,5	26,5	24,7	26,1	24,3	27,3	23,8	25,2
5	27,1	28,8	28,1	29,5	26,1	28,9	26,1	29,3	27,9	28,8	27,0	30,1	26,7	27,8
6	29,7	31,2	31,0	31,9	28,4	31,3	28,4	31,6	30,8	31,2	29,4	32,5	29,4	30,2
7	32,1	33,3	33,6	34,1	30,5	33,4	30,4	33,8	33,5	33,3	31,5	34,7	31,9	32,2
8	34,3	35,2	36,1	36,0	32,4	35,3	32,3	35,7	36,1	35,2	33,5	36,6	34,2	34,1
9	36,5	37,0	38,5	37,8	34,2	37,1	34,1	37,5	38,7	37,0	35,4	38,4	36,5	35,9

A táblázat első sora a régiót jelöli, a második sor betűjele, hogy a városok (V) vagy községekre (K) vonatkozó volatilitást tartalmazza az adott oszlop, százalékos formában. A táblázat első oszlopa a befektetési időt jelöli, években.

8.9. VÁRHATÓ HOZAM ÉS SZÓRÁS A FEDEZET LIKVIDÁLÁSÁNAK IDŐTARTAMÁIG

7.táblázat

A likvidálás időpontjáig (4 év) kumulált várható hozam (μ_Y) és szórás (σ_Y) becsült mértéke a fedezetek értékére, régiós bontásban

	μ_Y	σ_Y
Országos	-0,66%	23,19%
Budapest	3,97%	24,43%
Városok	-1,86%	23,43%
Városok Dél Alföld	-3,38%	24,18%
Városok Dél Dunántúl	-4,43%	25,01%
Városok Észak Alföld	-2,51%	23,45%
Városok Észak Magyarország	-5,39%	23,51%
Városok Közép Dunántúl	-1,48%	24,73%
Városok Közép Magyarország	2,50%	24,26%
Városok Nyugat Dunántúl	-3,15%	23,80%
Községek	-7,53%	24,88%
Községek Dél Alföld	-7,53%	26,12%
Községek Dél Dunántúl	-7,53%	26,80%
Községek Észak Alföld	-7,53%	26,20%
Községek Észak Magyarország	-7,53%	26,53%
Községek Közép Dunántúl	-7,53%	26,10%
Községek Közép Magyarország	-7,53%	27,33%
Községek Nyugat Dunántúl	-7,53%	25,19%

A községek régiós paraméterei szintetikususan kerültek előállításra, a törzsszövegben részletezettek szerint.

8.10. LGD RÁTÁK RÉSZLETES RÉGIÓS BONTÁSBAN (SZÁZALÉK)

8. táblázat										
Az eredményül kapott LGD ráták százalékos formában a HFM függvényében										
	HFM	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
	Országos	0,0	0,1	1,5	6,9	15,8	25,5	34,1	41,3	47,1
	Budapest	0,0	0,1	1,2	5,6	13,5	22,6	31,1	38,4	44,5
	Városok	0,0	0,1	1,7	7,4	16,6	26,3	34,9	41,9	47,7
	Községek	0,0	0,3	3,0	10,3	20,2	29,9	38,2	44,9	50,4
	Aggregált	0,0	0,2	2,2	8,3	17,5	27,0	35,4	42,4	48,1
Városok	Dél Alföld	0,0	0,1	2,0	8,2	17,6	27,3	35,7	42,7	48,4
	Dél Dunántúl	0,0	0,2	2,4	8,9	18,4	28,0	36,3	43,2	48,8
	Észak Alföld	0,0	0,1	1,8	7,7	17,0	26,7	35,3	42,3	48,0
	Észak Magyarország	0,0	0,1	2,2	8,9	18,7	28,6	37,0	43,9	49,5
	Közép Dunántúl	0,0	0,1	1,9	7,6	16,6	26,1	34,5	41,6	47,3
	Közép Magyarország	0,0	0,1	1,3	6,1	14,2	23,5	32,1	39,3	45,3
	Nyugat Dunántúl	0,0	0,1	1,9	8,0	17,4	27,1	35,6	42,6	48,3
Községek	Dél Alföld	0,0	0,3	3,3	10,6	20,3	29,9	38,1	44,8	50,3
	Dél Dunántúl	0,0	0,4	3,4	10,8	20,4	29,9	38,0	44,7	50,2
	Észak Alföld	0,0	0,3	3,3	10,6	20,4	29,9	38,1	44,8	50,2
	Észak Magyarország	0,0	0,4	3,4	10,7	20,4	29,9	38,0	44,7	50,2
	Közép Dunántúl	0,0	0,3	3,3	10,6	20,3	29,9	38,1	44,8	50,3
	Közép Magyarország	0,0	0,4	3,6	10,9	20,5	29,9	38,0	44,6	50,1
	Nyugat Dunántúl	0,0	0,3	3,0	10,3	20,2	29,9	38,2	44,9	50,4

Az első sor a HFM értékeket tartalmazza, az első oszlop az adott régiót és településtípust.

MNB-TANULMÁNYOK 146.
A MAGYAR LAKOSSÁGI JELZÁLOGHITELEK EGY
SZTOCHASZTIKUS NEMTELJESÍTÉSKORI VESZTESÉG MODELLJE
2022. november

Nyomda: Prospektus Kft.
8200 Veszprém, Tartu u. 6.

mnb.hu

©MAGYAR NEMZETI BANK

1013 BUDAPEST, KRISZTINA KÖRÚT 55.